ریاضی ۲

۱- گزینه «۲» ـ

$D_f = R\ ,\ D_g = R$

$D_{(f-g)(x)} = D_f \cap D_g = R$

$D_{(\frac{f}{g})(x)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

برای این‌که $D_{\frac{f}{g}}\ ,\ D_{f-g}$ با هم برابر شوند $g(x)$ هیچ‌گاه نباید برابر صفر شود. یعنی؛ $\Delta < 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 16 - 4\times a < 0 \Rightarrow 4a > 16 \Rightarrow a > 4$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۲- گزینه «۲» ـ

$BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{a}{b} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{25}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{34}{25} \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{a^2}{b^2-a^2} = \frac{9}{16} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}}$$

$\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\times\frac{a^2}{b^2} = \frac{34}{25}\times\frac{9}{16} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{25}} = \frac{34}{\cancel{25}}\times\frac{\cancel{9}}{16} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} = \frac{34}{16} \Rightarrow \frac{17}{8}$

(الله‌دادی) (فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت و تناسب و قضیه تالس)

۳- گزینه «۳» ـ

$A = x_1 - x_2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

$x_1 + x_2 = s = \frac{-b}{a} = m\ ,\ x_1 \cdot x_2 = p = \frac{c}{a} = 3m - 2$

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p$

$A^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p - 2p = s^2 - 4p \Rightarrow m^2 - 4(3m-2) = m^2 - 12m + 8 \Rightarrow m_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2} = 6$

(الله‌دادی) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲)

۴- گزینه «۴» ـ برای آن که وارون یک تابع خطی را بیابیم در معادله تابع اولیه جای $x\ ,\ y$ را عوض کرده و حال y را برحسب x می‌یابیم.

$y = \frac{bx+c}{5} \Rightarrow x = \frac{by+c}{5} \Rightarrow 5x = by + c \Rightarrow y = \frac{5x-c}{b} \Rightarrow \frac{5x-c}{b} = \frac{5x+a}{3} \Rightarrow 5x + a = 5x - c$

از مقایسه صورت و مخرج داریم:

$b = 3\ ,\ a = -c \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a + c + b = 0 + 3 = 3$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس دوم ـ به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی)

۵- گزینه «۱» ـ چون قطرهای چهارضلعی $ABCD$ منصف یکدیگرند، داریم:

$\frac{3}{2} = \frac{2+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1\ ,\ \frac{1}{2} = \frac{3+y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2 \qquad C(1\ ,-2)$

$\frac{3}{2} = \frac{-1+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 4\ ,\ \frac{1}{2} = \frac{0+y_D}{2} \Rightarrow y_D = 1 \qquad D(4\ ,1)$

شیب خط $AB = \frac{-3}{-3} = 1$

معادله خط $AB = y = mx + h \Rightarrow 3 = 2\times 1 + h \Rightarrow h = 1 \Rightarrow y = 1\times x + 1$

$y = x + 1$

شیب خط $BC = \frac{-2-0}{1-(-1)} = -1$

معادله خط $BC = y = mx + h \Rightarrow 0 = -1\times(-1) + h \Rightarrow h = -1$

$y = -x - 1$

با محاسبه شیب خطوط CD و DA درمی‌یابیم تمام اضلاع این چهارضلعی برهم عمودند، بنابراین چهارضلعی مستطیل است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{(3-0)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = xy = 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2} = 12$$

(الله‌دادی) (فصل اول ـ درس اول ـ مختصات نقطه وسط پاره‌خط و فاصله دو نقطه)

۶- گزینه «۳» ـ

$$g^{-1}=\{(۳,۶),(۱,۳),(۲,۵),(۴,۷)\}$$
$$D_{f-g^{-1}}=D_f\cap D_{g^{-1}}=\{۳,۱,۴\}$$
$$f-g^{-1}=\{(۳,۱),(۱,۲),(۴,-۵)\}$$

(اللّه‌دادی) (فصل سوم ـ دروس دوم و سوم ـ اعمال جبری روی توابع و تابع وارون)

۷- گزینه «۱» ـ

$$D_{\frac{g}{f}}=D_g\cap D_f-\{x\,|\,f(x)=۰\}$$
$$D_g=R\ ,\ D_f=R\ ,\ x^۲-x-۲=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=-۱\\x=۲\end{cases}$$

(اللّه‌دادی) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۸- گزینه «۲» ـ بررسی گزینه‌ها:

در گزینه «۱» مجموع دو رادیکال همواره نامنفی است و حداقل برابر صفر است بنابراین مجموع این مقدار با یک نمی‌تواند برابر صفر شود، بنابراین معادله جواب ندارد.

گزینه «۲»:

$$\sqrt{۲x^۲+۲}=x+۳\ \Rightarrow\ x+۳\ge ۰\ \Rightarrow\ x\ge -۳$$
$$\sqrt{۲x^۲+۲}=x+۳\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ ۲x^۲+۲=x^۲+۶x+۹\ \Rightarrow\ x^۲-۶x-۷=۰\ \Rightarrow\ x=-۱,۷\ \text{ق . ق}$$

گزینه «۳»: مجموع دو عبارت نامنفی حداقل دارای جواب صفر می‌باشد، بنابراین برای برقراری تساوی هر دو عبارت باید برابر صفر باشند. برای داشتن جواب مشترک باید عبارت داخل قدرمطلق در $x=۳$ $\Leftarrow$ $x-۳=۰$ عبارت زیر رادیکال صدق کند. بنابراین این معادله هم جواب ندارد.

$$x=۳\ \Rightarrow\ ۹-۷\times۳-۸=-۲۰$$

گزینه «۴»:

$$\sqrt{۳x+۵}=x+۴\ \Rightarrow\ x+۴\ge ۰\ \Rightarrow\ x\ge -۴$$
$$\sqrt{۳x+۵}=x+۴\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ ۳x+۵=x^۲+۸x+۱۶\ \Rightarrow\ x^۲+۵x+۱۱=۰$$

معادله جواب ندارد. $\Delta<۰$

(اللّه‌دادی) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

۹- گزینه «۲» ـ

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\ \Rightarrow\ \frac{۷۵}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\ \Rightarrow\ R=\frac{۵\pi}{۱۲}$$
$$\alpha=\frac{L}{r}\ \Rightarrow\ \frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۱۰}{r}\ \Rightarrow\ r=\frac{۱۲۰}{۵\pi}=\frac{۲۴}{\pi}$$

(اللّه‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ رابطه بین درجه و رادیان)

۱۰- گزینه «۴» ـ

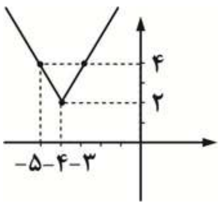
$$[x+۷]+[x-۴]-۷=[x]+۷+[x]-۴-۷$$

محاسبه ریشه مخرج: $۲[x]=۴\ \Rightarrow\ [x]=۲\ \Rightarrow\ x=[۲,۳)$

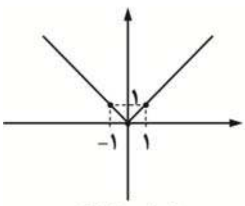
$$D_f=\{x\,|\,[x+۷]+[x-۴]-۷\neq ۰\}\ \Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}-[۲,۳)$$

(اللّه‌دادی) (فصل سوم ـ درس اول ـ دامنه توابع گویا و توابع جز صحیح)

۱۱- گزینه «۳» ـ

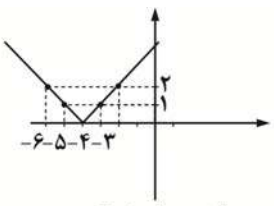


$f(x)=۲|x+۴|+۲$



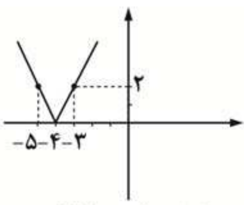
$f(x)=|x|$

و



$f(x)=|x+۴|$

و



$f(x)=۲|x+۴|$

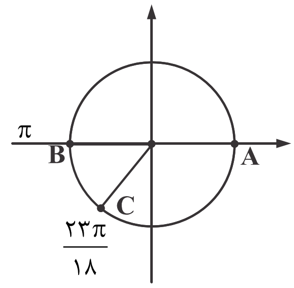
(اللّه‌دادی) (فصل سوم ـ درس سوم ـ رسم نمودار توابع)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۵۴۰}{۱۸۰}=\frac{R_۱}{\pi} \Rightarrow R_۱=۳\pi$$

$$\frac{۲۳۰}{۱۸۰}=\frac{R_۲}{\pi} \Rightarrow R_۲=\frac{۲۳\pi}{۱۸}$$

حال دایره مثلثاتی را رسم می‌کنیم و نقطه فرضی A را مشخص می‌کنیم.



$$\text{فاصله دو ماشین}=\frac{۲۳\pi}{۱۸}-\pi=\frac{۵\pi}{۱۸}$$

$$\alpha=\frac{L}{r} \Rightarrow \frac{۵\pi}{۱۸}=\frac{L}{۲۴} \Rightarrow L=\frac{۲۴\times ۵\pi}{۱۸}=\frac{۲۰\pi}{۳}$$

(الله‌دادی) (فصل چهارم ـ درس اول ـ رابطه بین درجه و رادیان)

۱۳- گزینه «۳» ـ الف)

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\begin{cases} x>۰ & f(x)=۱ \\ x<۰ & f(x)=-۱\end{cases} \Rightarrow D_g=R-\{۰\}, D_f=R-\{۰\}$$

بنابراین f , g برابرند.

ب)

$$f(x)=\frac{(x-۲)}{(x-۲)^۲}=\frac{۱}{(x-۲)} \Rightarrow D_f=R-\{۲\}, D_g=R-\{۲\}$$

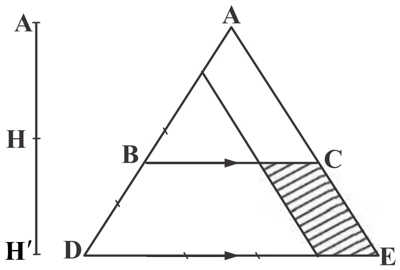
بنابراین f , g با هم برابرند.

ج) $D_g=R-\{-۳\}, D_f=R-\{-۳,۱\}$ بنابراین f , g برابر نیستند.

د) $D_g=x\ge ۲, D_f=x\ge ۲, \{۰\}$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس اول ـ تساوی دو تابع)

۱۴- گزینه «۱» ـ نسبت تشابه مثلث ABC به مثلث ADE برابر $\frac{۳}{۵}$ است. پس نسبت ارتفاع این دو مثلث هم $\frac{۳}{۵}$ است.



$$\left.\begin{array}{l} \frac{AH}{AH'}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{HH'}{AH'}=\frac{۲}{۵} \\ \frac{EF}{DE}=\frac{۱}{۵}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{CGFE}}{S_{ADE}}=\frac{EF.H'H}{\frac{DE\times AH'}{۲}}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times ۲=\frac{۴}{۲۵}=\frac{۱۶}{۱۰۰}$$

(الله‌دادی) (فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه مثلث‌ها)

۱۵- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=\sqrt{۹-x^۲} \Rightarrow D_f=۹-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۹ \Rightarrow -۳\le x\le ۳ \Rightarrow D_f=[-۳,۳]$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{x^۲-۴} \Rightarrow D_g:\begin{cases} x-۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۲ & ۱ \\ x^۲-۴\ne ۰ \quad x^۲\ne ۴, x\ne \pm ۲ & ۲\end{cases} \Rightarrow ۱\cap ۲=(۲,+\infty)$$

$$D_f\cap D_g=(۲,۳] \Rightarrow D_{h(x)}=D_{f(x)-g(x)}-\{x\,|\,f(x)=۰\}$$

$$\sqrt{۹-x^۲}=۰ \Rightarrow ۹-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۳ \Rightarrow D_{h(x)}=(۲,۳)$$

(الله‌دادی) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

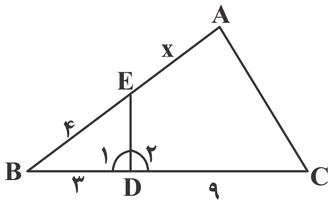
۱۶- گزینه «۳» ـ

$$s=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=۵ \Rightarrow \frac{(m+۱)}{۲}=۵ \Rightarrow \frac{m+۱}{۲}=۵ \Rightarrow m=۹$$

$$۲x^۲-۱۰m-۳۶=۰ \xrightarrow[\text{مختلف علامت}]{c\,,\,a} \Delta>۰$$

(الله‌دادی) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم)

۱۷- گزینه «۱» ـ



$$A + D_{۲} = D_{۲} + D_{۱} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{D}_{۱} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow B\overset{\Delta}{E}D \sim A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB} \xrightarrow[AB=۴+x]{BD=۳\,,\,BC=۱۲\,,\,BE=۴} \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

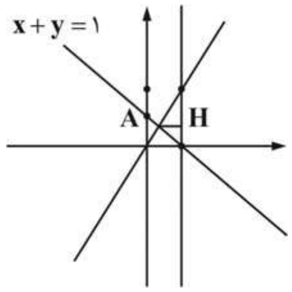
$$\Rightarrow \frac{۴}{۱۲} = \frac{۳}{۴+x} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۴+x} \Rightarrow x = ۵$$

(اللهدادی) (فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه مثلثها)

۱۸- گزینه «۱» ـ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم:

$$y = ۲x \Rightarrow \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix}\right. , x + y = ۱ \Rightarrow \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix}\right. , \left|\begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

کوچک‌ترین ارتفاع مثلث پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y = \frac{۲}{۳}$ است. زیرا اگر با دو خط $x + y = ۱$, $y = ۲x$ دستگاه تشکیل دهیم،



داریم: $\begin{cases} x + y = ۱ \\ y = ۲x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} , y = \frac{۲}{۳}$ یعنی مختصات نقطه A به‌صورت $A\left|\begin{matrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۳} \end{matrix}\right.$ است.

پس معادله AH به‌صورت $y = \frac{۲}{۳}$ است. (سراسری داخل کشور تجربی ـ ۸۴) (فصل اول ـ درس اول ـ معادله خط)

۱۹- گزینه «۲» ـ

نقطه وسط پاره‌خط AB $\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۵ + ۱}{۲} = ۳$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳ + ۷}{۲} = ۵$$

فاصله دو نقطه $= \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲} = \sqrt{(۳ + ۱)^۲ + (۵ - ۲)^۲} = ۵$

(اللهدادی) (فصل اول ـ درس اول ـ مختصات نقطه وسط پاره‌خط و فاصله دو نقطه)

۲۰- گزینه «۴» ـ چون یک چند جمله‌ای در زیر رادیکال با فرجه فرد به‌ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۴ - ۹x^۲}{۲x^۲} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm\frac{۲}{۳} \\ \text{مخرج} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{-۲}{۳}$		۰		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
		−	۰	+	ن	+	۰	−	

$$\Rightarrow x \in [\frac{-۲}{۳}, ۰) \cup (۰, \frac{۲}{۳}]$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۶) (فصل سوم ـ درس اول ـ دامنه توابع گویا و توابع رادیکالی)