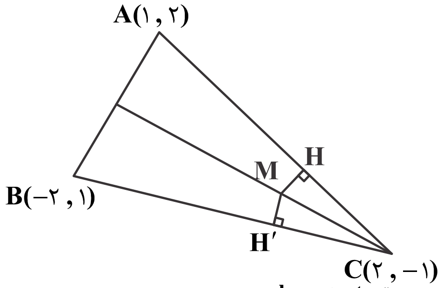
ریاضی ۲

۱- گزینه «۳» ـ با توجه به این‌که M روی نیمساز زاویه C قرار دارد، باید فاصله‌اش از خطوط AC و BC برابر باشد. بنابراین:



$$m_{AC}=\frac{۳}{-۱}=-۳ \Rightarrow y+۱=-۳(x-۲) \Rightarrow y+۳x-۵=۰ \Rightarrow MH=\frac{|b-۲|}{\sqrt{۱۰}}$$

$$m_{BC}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y-۱=-\frac{۱}{۲}(x+۲) \Rightarrow ۲y+x=۰ \Rightarrow MH'=\frac{|۲b+۱|}{\sqrt{۵}}$$

$$\xrightarrow{MH=MH'} \frac{|b-۲|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{|۲b+۱|}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\text{توان۲}} \frac{(b-۲)^۲}{۱۰}=\frac{(۲b+۱)^۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۷b^۲+۱۲b-۲=۰ \xrightarrow{\text{مقدار مثبت } b} b=\frac{-۶+۵\sqrt{۲}}{۷}$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس اول ـ فاصله نقطه از خط)

۲- گزینه «۲» ـ α ریشه معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^۲-\alpha-۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲=\alpha+۱ \xrightarrow{\text{توان۳}} \alpha^۶=\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۱$$

$$\alpha^۶+\beta^۳+۳\beta^۲+۳\beta=(\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۱)+\beta^۳+۳\beta^۲+۳\beta=\underbrace{(\alpha^۳+\beta^۳)}_{(\alpha+\beta)(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)}+۳(\alpha^۲+\beta^۲)+۳(\alpha+\beta)+۱$$

$$=s(s^۲-۳p)+۳(s^۲-۲p)+۳s+۱=۱۷$$

توجه کنید که: $s=۱ , p=-۱$ (جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها)

۳- گزینه «۴» ـ تابع دارای دو ریشه منفی است، پس $s<۰ , p>۰$.

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{۱}{a^۲}>۰ \Rightarrow a\in R \\ s=\frac{a}{a^۲}<۰ \Rightarrow a<۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a<۰$$

اما باید به این نکته توجه داشته باشیم که دلتای معادله باید بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\Delta=a^۲-۴a^۲=-۳a^۲<۰$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار a، دلتا کوچک‌تر از صفر بوده و معادله دارای ریشه نخواهد بود. (جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ محور تقارن تابع درجه دوم)

۴- گزینه «۳» ـ با توجه به این‌که محور تقارن تابع برابر است با $x=\frac{-\sqrt{۳}a}{۲a}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و نقاط $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-a$ و $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+a$ نسبت به خط $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ متقارن است، پس $f(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+a)=f(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-a)$. (جعفری) (فصل اول ـ درس دوم ـ محور تقارن تابع درجه دوم)

۵- گزینه «۴» ـ

$$(x+۱)(f(x)-۱)\geq ۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-۱		۱		$+\infty$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)-۱$	$-$		$-$	۰	$+$	
$(x+۱)(f(x)-۱)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow (-\infty , -۱]\cup[۱ , +\infty) \quad (۱)$$

$$[f(x)]\geq ۰ \Rightarrow f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱ \quad (۲)$$

$$[f(x)]\neq ۱ \Rightarrow x\notin[۱ , ۳) \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} \{-۱\}\cup[۳ , +\infty)$$

(جعفری) (فصول اول و سوم ـ دروس اول و سوم ـ توابع رادیکالی و تابع جز صحیح)

۶- گزینه «۳» ـ طرفین معادله را اول در $\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$x-۲-(x+۱)=\frac{-x^۲+x}{۲} \Rightarrow x^۲-x-۶=۰ \Rightarrow x=۳ \text{ ق ق} , x=-۲ \text{ غ ق ق} \Rightarrow k=۳$$

حال اگر مقدار $k=۳$ را در معادله دوم جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$\sqrt{\sqrt{x-۱}-۱۲}=۱ \xrightarrow{\text{توان۲}} \sqrt{x-۱}-۱۲=۱ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۱۳ \xrightarrow{\text{توان۲}} x-۱=۱۶۹ \Rightarrow x=۱۷۰$$

(جعفری) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا و رادیکالی)

۷- گزینه «۱» ـ

$$\begin{cases} EF \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \\ \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۱۶} \qquad \begin{cases} FG \parallel AB \Rightarrow \overset{\Delta}{CFG} \sim \overset{\Delta}{ABC} \\ \dfrac{FC}{AC} = \dfrac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{CFG}}{S_{ABC}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow S_{EFBG} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{CFG} = (۱ - \frac{۱}{۱۶} - \frac{۹}{۱۶})S_{ABC} = \frac{۶}{۱۶} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{EFBG}}{S_{ABC}} = \frac{۳}{۸}$$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه مثلث‌ها)

۸- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{۴-x}{۱۰+x} \\ \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{۲x-۸}{-۲۰-۲x} = \dfrac{-۲(۴-x)}{-۲(۱۰+x)} = \dfrac{۴-x}{۱۰+x} \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDE} \begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \ \text{مشـــترک} \\ \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BC}{CD} \end{cases} \Rightarrow \Delta \sim \Delta$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{x}{۷-x} = \frac{۴-x}{۱۰+x} \xrightarrow{\text{ترکیـب در مخـرج}} \frac{x}{۷} = \frac{۴-x}{۱۴} \Rightarrow ۲x = ۴-x \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

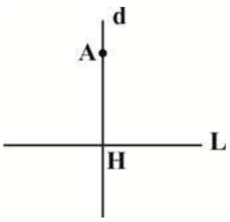
(جعفری) (فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه مثلث‌ها)

۹- گزینه «۲» ـ از آن‌جا که فاصله O از دو خط AB و AC برابر است، پس O روی نیمساز زاویه A قرار دارد، در نتیجه $C\hat{A}O = ۳۰°$ است.
از طرف دیگر:

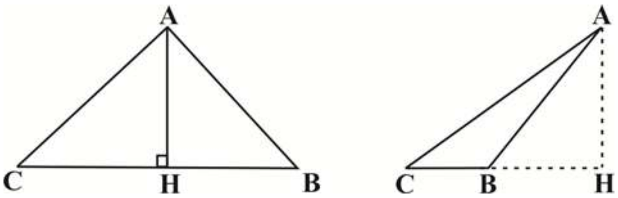
$$\hat{C} = ۱۸۰° - (۶۰° + ۹۰°) = ۳۰°$$

مجددا O روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس $A\hat{C}O = \frac{۳۰°}{۲} = ۱۵°$. (جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم‌های هندسی، استدلال)

۱۰- گزینه «۱» ـ خط L را در نظر می‌گیریم و خط d را بر آن عمود می‌کنیم. روی خط d به اندازه ۳ واحد جدا می‌کنیم. از نقطه A دو دایره به شعاع های ۴ و ۵ رسم می‌کنیم تا نقاط B و C به‌دست آیند.

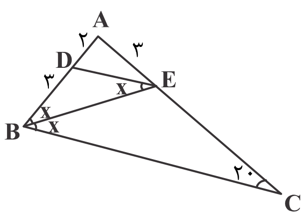


به این ترتیب دو مثلث به‌صورت زیر به‌وجود می‌آید:



توجه کنید مثلث‌های دیگری که قابل رسم هستند با این دو مثلث هم‌نهشت می‌شوند. (جعفری) (فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم‌های هندسی)

۱۱- گزینه «۳» ـ فرض می‌کنیم $E\hat{B}C = x$



$$DE \parallel BC, \ \text{مورب} \ BE \Rightarrow D\hat{E}B = x \quad (۱)$$

$$\hat{B} \ \text{نیمســـاز} \ BE \Rightarrow D\hat{B}E = x \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \overset{\Delta}{BDE} \ \text{متســاوی الســاقین اســت} \Rightarrow DE = BD = ۳$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضــیه تــالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۲}{۵} = \dfrac{۳}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{۱۵}{۲} = ۷/۵ \\ AC = ۷/۵ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \ \text{متســاوی الســاقین اســت} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow ۲\hat{A} + ۲۰° = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{A} = ۸۰°$$

(جعفری) (فصل دوم ـ درس دوم ـ قضیه تالس)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$\begin{cases} x^{۲}-۱\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۱ , x\geq ۱ \\ ۳-x>۰ \Rightarrow x<۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=(-\infty , -۱]\cup[۱ , ۳)$$

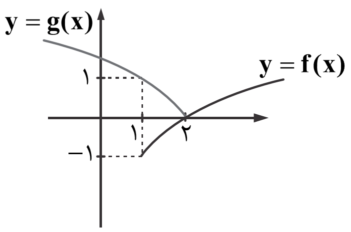
$$D_g=R$$

$$g(x)=۰ \Rightarrow x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۲ , -۱ , ۱$$

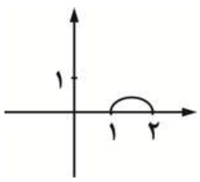
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=(-\infty , -۲)\cup(-۲ , -۱)\cup(۱ , ۳)$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۳- گزینه «۴» ـ نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را رسم می‌کنیم:



در نتیجه نمودار $f(x)+g(x)$ به صورت زیر است:



(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$\left.\begin{array}{l} f\times g=\{(۱ , -۲)(۴ , -۲)\} \\ f-g=\{(۱ , ۳)(۴ , -۳)\} \end{array}\right\} \Rightarrow f\times g+f-g=\{(۱ , ۱)(۴ , -۵)\} \Rightarrow$$ مجموع اعضای بـــرد $=۱-۵=-۴$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۵- گزینه «۲» ـ ابتدا فرض می‌کنیم $f^{-۱}(-۱)=c$. سپس به‌جای x قرار می‌دهیم c:

$$f(c)+c+f(\frac{۱}{c})=\frac{c^{۲}-۴c+۱}{۲} \Rightarrow f(c)+f(\frac{۱}{c})=\frac{c^{۲}-۶c+۱}{۲}$$

از آن‌جا که f یک تابع خطی است، به شکل $f(x)=ax+b$ می‌باشد، بنابراین:

$$f(c)=ac+b , f(\frac{۱}{c})=\frac{a}{c}+b$$

$$ac+b+\frac{a}{c}+b=\frac{c^{۲}-۶c+۱}{۲} \Rightarrow \frac{ac^{۲}+۲bc+a}{c}=\frac{c^{۲}-۶c+۱}{۲} \Rightarrow a=۱ , b=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=x-۳ \Rightarrow f(-۳)=-۶$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس دوم ـ تابع وارون)

۱۶- گزینه «۴» ـ با توجه به این‌که دامنه f با برد $f^{-۱}$ برابر است داریم:

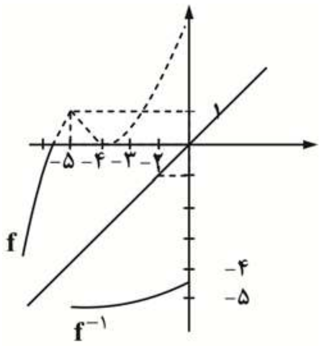
$$\left.\begin{array}{l} D_f=R_{f^{-۱}} \\ D_f=[۳ , +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow R_{f^{-۱}}=[۳ , +\infty) \Rightarrow$$ $f^{-۱}$ در ناحیه اول اســـت.

اگر تابع f و $f^{-۱}$ یکدیگر را قطع کنند، این تقاطع روی خط $y=x$ اتفاق می‌افتد بنابراین:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x-۳}+۴|x| \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-۳}+۴|x|=x \xrightarrow[|x|=x]{x>۳} \sqrt{x-۳}+۴x=x \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-۳}}_{\text{مثبــت}}=\underbrace{-۳x}_{\text{منفــی}}$$ غ ق ق

بنابراین دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند. (جعفری) (فصل سوم ـ درس دوم ـ تابع وارون)

۱۷- گزینه «۳» ـ



$$|x+۴|(x+۲)+۱=\begin{cases}(x+۴)(x+۲)+۱=(x+۳)^{۲} & x\geq -۴\\ (-x-۴)(x+۲)+۱=-(x+۳)^{۲}+۲ & x<-۴\end{cases}$$

(جعفری) (فصل سوم ـ درس دوم ـ تابع وارون)

۱۸- گزینه «۲» ـ با توجه به این‌که دامنه تابع g برابر است با $[-۱,\circ]$، کافی است نمودار تابع f را فقط در بازه $[-۱,\circ]$رسم کنیم:

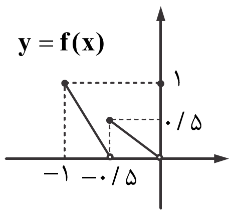
$$-۱\leq x<-\circ/۵ \Rightarrow -۲\leq ۲x<-۱ \Rightarrow [۲x]=-۲ \Rightarrow f(x)=-۲x-۱ \Rightarrow$$

x	-۱	-۰/۵
y	۱	∘

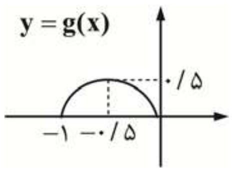
$$-\circ/۵\leq x<\circ \Rightarrow -۱\leq ۲x<\circ \Rightarrow [۲x]=-۱ \Rightarrow f(x)=-x \Rightarrow$$

x	-۰/۵	∘
y	۰/۵	∘

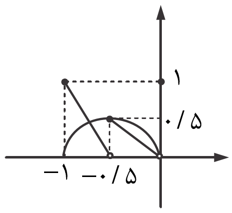
$$x=\circ \Rightarrow f(x)=۱$$



تابع $y=-x^2-x$ یک سهمی است که دارای نقطه ماکزیمم $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴})$ است، بنابراین تابع $g(x)=\sqrt{-x^2-x}$ به شکل یک سهمی دارای نقطه ماکزیمم $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ است.

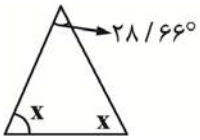


در نتیجه دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند:



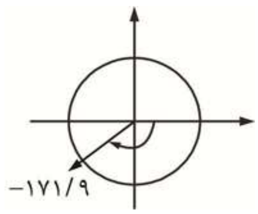
(جعفری) (فصل سوم ـ درس اول ـ تابع جزء صحیح)

۱۹- گزینه «۱» ـ



آ) $\frac{R}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \frac{۰/۵}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow D=۲۸/۶۶^\circ \Rightarrow x=\frac{۱۸۰^\circ-۲۸/۶۶^\circ}{۲}=۷۵/۶۷^\circ$

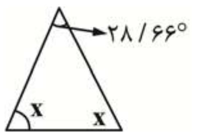
می‌دانیم در مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین ساق‌ها از قاعده بزرگ‌ترند.



ب) $D=\frac{-۳\times ۱۸۰^\circ}{\pi}=-۱۷۱/۹^\circ$

بنابراین ۳- رادیان در ناحیه سوم قرار دارد.

پ) طبق تعریف یک رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی باشد.



ت) $\frac{\frac{\pi}{۵}}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow D=۳۶^\circ$

$\frac{۰/۷۵}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow D=۴۲/۹^\circ$

$\Rightarrow$ رادیان $\frac{\pi}{۵}$ > رادیان ۰/۷۵

بنابراین تنها مورد «ت» درست است. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ تبدیل رادیان به درجه)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$\frac{R}{D}=\frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۴۲^\circ}=\frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \hat{B}=\frac{۷\pi}{۳۰} \xrightarrow{\text{مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰ درجه است.}} \hat{C}=\pi-(\frac{\pi}{۱۰}+\frac{۷\pi}{۳۰})=\frac{۲\pi}{۳}$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس اول ـ تبدیل درجه به رادیان)