حسابان ۱

۱- گزینه «۳» ـ مجموع سه جمله دوم برابر اختلاف مجموع شش جمله اول و سه جمله اول است. پس:

$$S_۳ = \frac{۴}{۳}(S_۶ - S_۳) \Rightarrow \frac{۷}{۳}S_۳ = \frac{۴}{۳}S_۶ \Rightarrow ۷(۲a_۱ + ۲d) = ۴(۲a_۱ + ۵d) \Rightarrow ۶a_۱ + ۶d \Rightarrow a_۱ = d$$

$$\frac{\text{جمله سوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{a_۱ + ۲d}{a_۱} = \frac{a_۱ + ۲a_۱}{a_۱} = ۳$$

(سراسری ۹۱ ـ با تغییر) (فصل اول ـ درس اول ـ دنباله حسابی)

۲- گزینه «۲» ـ

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} = ۴ \\ S_{۲n} &= \frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q} = ۲۸ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + q^n + q^{۲n} = ۷ \Rightarrow q^{۲n} + q^n - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} q^n = -۳ \\ q^n = ۲ \end{cases}$$

$$S_{۴n} = \frac{a_۱(۱-q^{۴n})}{۱-q} \Rightarrow \frac{S_{۴n}}{S_n} = \frac{۱-q^{۴n}}{۱-q^n} = ۱ + q^n + q^{۲n} + q^{۳n}$$

بنابراین یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$q^n = -۳ \Rightarrow \frac{S_{۴n}}{S_n} = ۱ - ۳ + ۹ - ۲۷ = -۲۰ \Rightarrow S_{۴n} = -۸۰$$

$$q^n = ۲ \Rightarrow \frac{S_{۴n}}{S_n} = ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ = ۱۵ \Rightarrow S_{۴n} = ۶۰$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۳- گزینه «۴» ـ ابتدا معادله خطی را که از (۴ , ۵) و (۳ , ۸) می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y - y_۰}{x - x_۰} = \frac{۴-۳}{۵-۸} = \frac{-۱}{۳} \xrightarrow{\text{شیب خط عمود}} m' = +۳ \Rightarrow \text{معادله خط عمود}: y + ۲ = ۳(x - ۳)$$

با کمی دقت در گزینه‌ها متوجه می‌شویم که گزینه «۴» صحیح است. (رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس پنجم ـ معادله خط)

۴- گزینه «۴» ـ

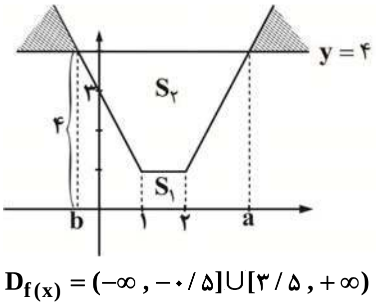
$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = ۴ \Rightarrow \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱ x_۲} = ۴ \Rightarrow \frac{S}{P} = ۴ \Rightarrow \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = ۴ \Rightarrow \frac{-b}{c} = ۴ \Rightarrow \frac{۳m + ۲}{۲m} = ۴ \Rightarrow ۳m + ۲ = ۸m \Rightarrow m = \frac{۲}{۵}$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس دوم ـ روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم)

۵- گزینه «۱» ـ

$$|x-۱| + |x-۲| - ۴ \geq ۰ \Rightarrow |x-۱| + |x-۲| \geq ۴$$

شکل توابع هر دو طرف نامعادله را رسم کرده و از روی شکل دامنه را حساب خواهیم کرد. با توجه به شکل متوجه می‌شویم که سطح $S_۱$ یک مربع است وهمچنین سطح $S_۲$ نیز مربعی خواهد شد با ضلع ۴ درنتیجه a و b را به‌دست می‌آوریم:



$$a = ۳/۵$$
$$b = -۰/۵$$

در نتیجه می‌توانیم بازه نواحی هاشور خورده که همان دامنه $f(x)$ است را بنویسیم:

$$D_{f(x)} = (-\infty, -۰/۵] \cup [۳/۵, +\infty)$$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس اول ـ آشنایی با توابع)

۶- گزینه «۱» ـ

$$f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x^۲ + ۴}$$

$$g(f^{-۱}(x)) = gof^{-۱} = \sqrt{۹ - (f^{-۱})^۲} = \sqrt{۹ - x^۲ - ۴} = \sqrt{۵ - x^۲}$$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس چهارم ـ اعمال روی توابع)

۷- گزینه «۱» ـ

توجه کنید که: $(g^{-1}of)(a) = g^{-1}(f(a)) = ۳$

بنابراین: $f(a) = g(۳) = -۶$

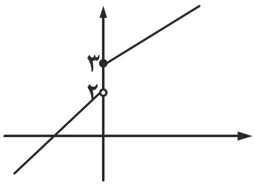
با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$۹\sqrt{a} = -۶ \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{-۲}{۳}$$ غ ق ق

$$-\sqrt{-۹a} = -۶ \Rightarrow -۹a = ۳۶ \Rightarrow a = -۴$$

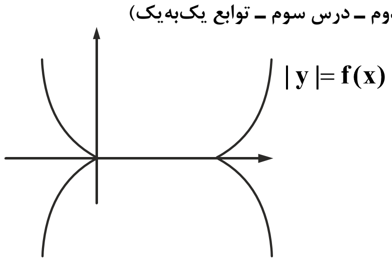
(سراسری خارج از کشور ۹۳ ـ با تغییر) (فصل دوم ـ درس چهارم ـ اعمال روی توابع)

۸- گزینه «۳» ـ منظور از وارون‌پذیر بودن همان یک‌به‌یک بودن تابع است. با رسم نمودار گزینه «۳» درمی‌یابیم که یک‌به‌یک نیست:



با توجه به شکل می‌بینیم که یک تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وار ون پذیر است. (رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس سوم ـ توابع یک‌به‌یک)

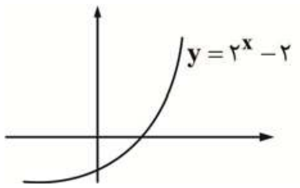
۹- گزینه «۲» ـ

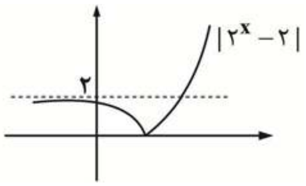


$$|y| = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y \geq ۰ \Rightarrow y = f(x) \\ y < ۰ \Rightarrow y = -f(x) \end{cases}$$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس اول ـ نمودار تابع)

۱۰- گزینه «۴» ـ نمودار تابع $y = |۲^x - ۲|$ را رسم می‌کنیم.





برای این که تلاقی نمودار $y = |۲^x - ۲|$ و $y = k$ یک نقطه باشد، باید k بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد. (رستمی‌کیا) (فصل سوم ـ درس اول ـ معادله نمایی)

۱۱- گزینه «۲» ـ ابتدا نقطه تقاطع نمودارها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ۲^x + \frac{۳}{۲} \\ y = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲x} \end{cases} \Rightarrow ۲^x + \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲^x} \Rightarrow (۲^x)^۲ + \frac{۳}{۲}۲^x = ۱ \xrightarrow{۲^x = A} ۲A^۲ + ۳A - ۲ = ۰ \Rightarrow (A+۲)(A - \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow (۲^x + ۲)(۲^x - \frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow ۲^x = ۲^{-۱} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۲ \end{cases}$$

بنابراین باید فاصله نقاط $B(-۱, ۲)$ و $A(-۲, ۳)$ را به‌دست آوریم که برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-۱+۲)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۲}$$

(سراسری ۹۶ ـ با تغییر) (فصل سوم ـ درس اول ـ معادله نمایی)

۱۲- گزینه «۱» ـ اگر α و β ریشه‌های معادله داده شده باشند. داریم:

$$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \alpha^۳ + \beta^۳ \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \alpha^۳ + \beta^۳ \Rightarrow \frac{S}{P} = S^۳ - ۳PS \Rightarrow \frac{۱}{P} = S^۲ - ۳P$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴} = (\frac{-m}{۱})^۲ - ۳(\frac{۴}{۱}) \Rightarrow \frac{۱}{۴} = m^۲ - ۱۲ \Rightarrow m^۲ = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow m = \pm\frac{۷}{۲}$$

ظاهراً دو مقدار برای m به‌دست آمده ولی برای وجود هر ریشه α و β باید $\Delta \geq ۰$ باشد، که برای هر دو مقدار m به‌دست آمده $\Delta < ۰$ است. پس هیچ مقداری وجود ندارد. (رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس دوم ـ معادله درجه دوم)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$۱ - \sqrt{x} = (۱-x)(۱+\sqrt{x}) \Rightarrow ۱ - \sqrt{x} = ۱ + \sqrt{x} - x - x\sqrt{x} \Rightarrow x = ۲\sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (۲-x)\sqrt{x} = x \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{۲-x} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x = \frac{x^۲}{۴ - ۴x + x^۲} \Rightarrow ۴x - ۴x^۲ + x^۳ = x^۲$$

$$\Rightarrow\ x^3-5x^2+4x=0 \Rightarrow x(x^2-5x+4)=0 \Rightarrow x(x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=0 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا و گنگ)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$$|2-3x|>5 \Rightarrow \begin{cases} 2-3x>5 \Rightarrow 3x<-3 \Rightarrow x<-1 \\ 2-3x<-5 \Rightarrow 3x>7 \Rightarrow x>\frac{7}{3} \end{cases} (I) \Rightarrow (I)\cap(II):(\frac{7}{3},+\infty)$$

$$|x-2|\le x \Rightarrow x^2-4x+4\le x^2 \Rightarrow 4x>4 \Rightarrow x\ge 1\ (II)$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس چهارم ـ نامعادلات قدر مطلقی)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$\left.\begin{matrix}(5,k^2-2k)\\(5,3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow k^2-2k=3 \Rightarrow k^2-2k-3=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-1 & \text{ق ق} \\ k=3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس اول ـ آشنایی با تابع)

۱۶- گزینه «۴» ـ

می دانیم: $0\le 3x-[3x]<1 \xrightarrow{+2} 2\le y<3 \Rightarrow R=[2,3)$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس اول ـ انواع تابع (جزء صحیح))

۱۷- گزینه «۴» ـ نیازی به محاسبه تابع وارون نیست. کافی است برعکس شده نقاط داده شده را در تابع قرار دهید و ببینید کدام در آن صدق می‌کند. (رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس سوم ـ وارون تابع)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(-20+(n-1)3) \Rightarrow \frac{n}{2}(-20+(n-1)3)>0 \Rightarrow 3n>23 \Rightarrow n>7/000 \Rightarrow n=8$$

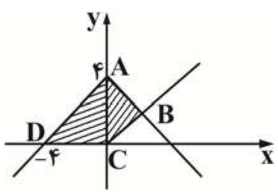
(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس اول ـ مجموع دنباله حسابی)

۱۹- گزینه «۳» ـ ابتدا توجه کنید که:

$$y=4-|x|=\begin{cases}4+x & x<0\\4-x & x\ge 0\end{cases}$$

$$y=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\2x & x\ge 0\end{cases}$$

اکنون نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:



$$4-x_B=2x_B \Rightarrow x_B=\frac{4}{3}$$

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}+S_{\overset{\Delta}{ACD}}=\frac{\frac{4}{3}\times 4}{2}+\frac{4\times 4}{2}=\frac{32}{3}$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس چهارم ـ قدرمطلق و ویژگی‌های آن)

۲۰- گزینه «۱» ـ

$$-1<x<0 \Rightarrow -(2x-1)+(2-x)=-2x+1+2-x=-3x+3$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس چهارم ـ قدرمطلق و ویژگی‌های آن)