

حسابان ۱

۱- گزینه «۳» - می‌دانیم S_n یک چندجمله‌ای درجه ۲ است. بنابراین:

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow S_n = 3n^2 + 3n \Rightarrow \begin{cases} S_{11} = 3(121) + 3(11) = 396 \\ S_6 = 3(36) + 3(6) = 126 \end{cases}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{11} - S_6 = 396 - 126 = 270$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس اول - مجموع جملات دنباله حسابی) (متوسط)

۲- گزینه «۴» -

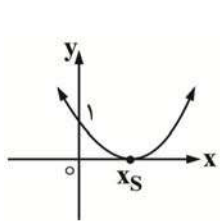
$$S_6 = \frac{a}{\lambda} S_7 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{a}{\lambda} \times \frac{a_1(1-q^7)}{1-q}$$

$$1+q^7 = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow q^7 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt[7]{\lambda}}$$

$$\frac{a_6}{a_7} = q^6 = \left(\frac{1}{\sqrt[7]{\lambda}}\right)^6 = \frac{1}{\lambda^6}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس اول - دنباله هندسی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -



$$\Rightarrow \begin{cases} x_S > 0 \\ x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-(-(a-1))}{2(a+2)} > 0 \Rightarrow \frac{a-1}{a+2} > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 1 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a-1)^2 - 4(a+2) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 - 4a - 8 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ (غ ق ق)} \\ a = 7 \end{cases} \text{ (} a < -2 \text{ یا } a > 1 \text{)}$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس دوم - صفرهای تابع) (دشوار)

۴- گزینه «۴» -

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + \sqrt{3} \\ \beta = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\alpha^\beta \beta^\alpha = (2 + \sqrt{3})^{2 - \sqrt{3}} \times (2 - \sqrt{3})^{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{2 - \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}$$

$$= (2 + \sqrt{3})^{-2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^{2\sqrt{3}} = (7 - 4\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

دقت کنید که چون $P = \alpha \cdot \beta = 1$ بنابراین α و β معکوس یکدیگرند و در نتیجه $\alpha^\beta \beta^\alpha$ نسبت به α و β دارای خاصیت جابه‌جایی است؛ پس

فرقی نمی‌کند که α را ریشه بزرگ‌تر در نظر بگیریم یا کوچک‌تر.

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس دوم - روابط بین ضرایب ریشه‌های معادله درجه ۲) (دشوار)

۵- گزینه «۲» -

$P(x, x-6) \rightarrow x-y=6$ نقطه‌ای دلخواه روی خط

$$OP + PA = 8 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (x-6)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2} = 8 \Rightarrow \sqrt{\frac{2x^2 - 12x + 36}{t+16}} + \sqrt{\frac{2x^2 - 12x + 20}{t}} = 8 \Rightarrow \sqrt{t+16} + \sqrt{t} = 8$$

$$\Rightarrow t+16+t+2\sqrt{t^2+16t} = 64 \Rightarrow \sqrt{t^2+16t} = 24-t \Rightarrow t^2+16t = 576 - 48t + t^2 \Rightarrow 64t = 576 \Rightarrow t = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 20 = 9 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{56}}{4} \Rightarrow \text{هر دو جواب، قابل قبول‌اند.}$$

مجموع جواب‌ها = 6

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - ترکیبی) (دشوار)

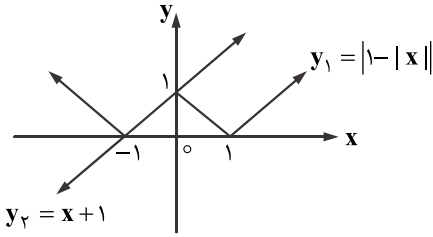
۶- گزینه «۴» -

$$\frac{|\Delta k - 36 - 1|}{\sqrt{\Delta^2 + (-12)^2}} = \frac{4}{13} \Rightarrow |\Delta k - 37| = 4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta k - 37 = 4 \Rightarrow k = \frac{41}{5} = 8/2 \\ \Delta k - 37 = -4 \Rightarrow k = \frac{33}{5} = 6/6 \end{cases}$$

مجموع مقادیر $k = 8/2 + 6/6 = 14/8$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - ترکیبی) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - از روش هندسی کمک می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود، تمام بازه $[-1, 0]$ ریشه‌های این معادله $(y_1 = y_2)$ می‌باشند که شامل هیچ عدد مثبتی نمی‌باشد.



(گروه مؤلفان علوی) (فصل اول - درس چهارم - حل معادلات قدرمطلق) (متوسط)

۸- گزینه «۴» - در گزینه «۴» داریم:

$$x = 9 \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \begin{cases} x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \\ y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0, 2 \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: با توجه به این که $\Delta \leq 0$ است، فقط نقطه $(0, 0)$ صدق می‌کند، پس گزینه «۱» تابع است.

گزینه «۲»: همه جملات مثبت می‌باشند، پس هیچ زوج مرتبی در آن صدق نمی‌کند، یعنی رابطه \emptyset است، پس تابع است.

گزینه «۳»: با توجه به نامنفی بودن عبارت‌ها باید $\begin{cases} x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \\ y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$ باشد، یعنی این رابطه تنها شامل زوج مرتب $(9, 4)$ می‌شود، پس تابع است.

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس دوم - معادلات و توابع) (متوسط)

۹- گزینه «۳» -

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} = D_g \Rightarrow x^2 + bx + c = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$

از طرفی با ساده کردن ضابطه g داریم:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2} = \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{x + a}{x - 2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + c = 2 + 4 = 6$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس اول - برابری دو تابع) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» -

$$x^2 - |x| - 2 = 0 \Rightarrow |x|^2 - |x| - 2 = 0 \xrightarrow{|x|=k \geq 0} k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \text{ (غ ق ق)} \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس دوم - دامنه توابع گویا) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$\sqrt{(|x| - \sqrt{2})(3 - |x|)} \Rightarrow (|x| - \sqrt{2})(3 - |x|) \geq 0$$

$$|x| = k \Rightarrow (k - \sqrt{2})(3 - k) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \leq k \leq 3$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 2 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ k = 3 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \end{cases} \xrightarrow{\cup} 2 \leq x < 4$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس دوم - ترکیبی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» -

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ [x] = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -x - 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ [x] = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 0 = x$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -x - 1 & ; -1 < x < 0 \\ x & ; 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(کتاب همراه علوی) (فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح) (آسان)

۱۳- گزینه «۲» -

$$-6 \leq x < 3 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \text{تعداد پاره خطها} = 1 - (-2) = 3$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح) (آسان)

۱۴- گزینه «۱» -

$$D_f = \{2, 3, -1\} \\ D_g = \{2, -1, 4\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2, -1\} \Rightarrow f + g = \{(2, 1), (-1, 1)\}$$

$$\Rightarrow R_{f+g} = \{1\} \Rightarrow \begin{cases} n(D_{f+g}) = 2 \\ n(R_{f+g}) = 1 \end{cases} \Rightarrow n(D_{f+g}) - n(R_{f+g}) = 2 - 1 = 1$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس چهارم - اعمال جبری روی توابع) (آسان)

۱۵- گزینه «۲» - دقت کنید که چون تابع f^{-1} خطی است، پس تابع f هم خطی خواهد بود.

$$(2, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 2) \in f$$

$$(-2, -2) \in f^{-1} \Rightarrow (-2, -2) \in f$$

$$f : y - 2 = \frac{-2 - 3}{-2 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 2 \Rightarrow f(2) = 8$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس سوم - وارون یک تابع) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» -

$$\left. \begin{aligned} D_f : 5 - x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 5 \\ D_g : x - 4 = 0 &\Rightarrow x = 4 \Rightarrow \mathbb{R} - \{4\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = (-\infty, 5] - \{4\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (-\infty, 5] - \{4\} - \{3\} = (-\infty, 5] - \{3, 4\}$$

دامنه فوق شامل اعداد صحیح و نامنفی ۰، ۱، ۲ و ۵ می باشد. (گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس چهارم - اعمال جبری روی توابع) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - باید گزینه‌ای را مشخص کنیم که در آن $D_{gof} = \emptyset$ باشد. در گزینه «۲» داریم:

$$D_f = (0, +\infty) \quad , \quad D_g = (-\infty, 2)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \mid f(x) < 2\} \Rightarrow \{x > 0 \mid \underbrace{x + \frac{1}{x}}_x < 2\} = \emptyset$$

جواب ندارد

دقت می کنیم که اگر $x > 0$ آن گاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ و لذا نامعادله $x + \frac{1}{x} < 2$ به ازای $x > 0$ جواب ندارد.

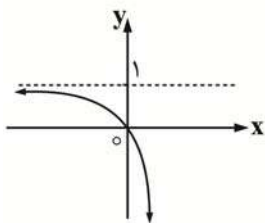
(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس چهارم - ترکیب توابع) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» -

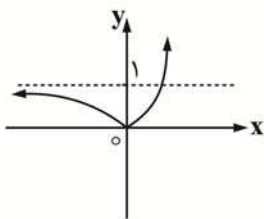
$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = (f \circ g)^{-1}(a) = 8 \Rightarrow (f \circ g)(8) = a \Rightarrow f(g(8)) = a \Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم - درس چهارم - ترکیب توابع) (متوسط)

$$f(x) = -2^x + 1$$



$$|f(x)| = |-2^x + 1|$$



(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس اول - رسم تابع نمایی) (متوسط)

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)^{x^2+x} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2x+8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^{x^2+x} > (\sqrt{2}-1)^{2x+8} \xrightarrow[\text{کاهشی}]{0 < \sqrt{2}-1 < 1} x^2+x < 2x+8$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4 \xrightarrow{-1} -3 < x-1 < 3 \Rightarrow |x-1| < 3$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم - درس اول - تابع نمایی) (متوسط)