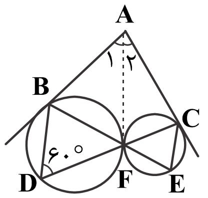
هندسه ۲

۱- گزینه «۲» ـ از A خطی مماس بر دو دایره در نقطه F رسم می‌کنیم. زاویه BDF زاویه محاطی رو به کمان $\widehat{BF}$ و زاویه ABF زاویه ظلّی رو به کمان BF است، پس برابرند:



$$B\hat{D}F = A\hat{B}F = ۶۰°$$

مثلث ABF متساوی‌الساقین است، پس:

$$A\hat{B}F = A\hat{F}B = \hat{A}_۱ = ۶۰°$$

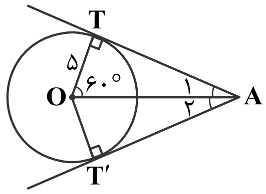
و چون $B\hat{A}C = ۹۰°$ پس $\hat{A}_۲ = ۳۰°$. در این‌جا هم مثلث ACF متساوی‌الساقین است. پس:

$$A\hat{F}C = A\hat{C}F = ۷۵°$$

$A\hat{C}F$ یک زاویه ظلی روبه‌روی کمان CF و زاویه FEC زاویه محاطی مقابل کمان CF است. پس با هم برابرند، یعنی $F\hat{E}C = ۷۵°$

(فیروزی) (فصل اول ـ دروس اول و دوم ـ زاویه در دایره و مماس‌ها) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ



$$T\hat{A}T' = ۶۰° \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۳۰° \Rightarrow OA = ۲OT = ۱۰$$

$$AT = \sqrt{۱۰^۲ - ۵^۲} = ۵\sqrt{۳}$$

$$S_{OTAT'} = ۲(\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵\sqrt{۳}) = ۲۵\sqrt{۳}$$

مساحت محدود به دو خط مماس و دایره برابر است با مساحت چهارضلعی $ATOT'$ منهای مساحت قطاع:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\pi(۵)^۲ ۱۲۰°}{۳۶۰°} = \frac{۲۵\pi}{۳}$$

$$\text{مساحت محصور} = ۲۵\sqrt{۳} - \frac{۲۵\pi}{۳} = ۲۵(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳})$$

(فیروزی) (فصل اول ـ دروس اول و دوم ـ مماس و قطاع در دایره) (دشوار)

۳- گزینه «۱» ـ مثلث با طول اضلاع ۱ و $\sqrt{۱۵}$ و ۴ یک مثلث قائم‌الزاویه است:

$$۱ + \sqrt{۱۵}^۲ = ۴^۲ \Rightarrow ۱ + ۱۵ = ۱۶$$

در مثلث قائم‌الزاویه اندازه شعاع دایره محیطی برابر نصف وتر است.

$$R = \frac{۴}{۲} = ۲$$

(فیروزی) (فصل اول ـ درس سوم ـ چند ضلعی محاطی) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ

$$r_۱ + r_۲ = \frac{۲}{۳}d < d \Rightarrow \text{دو دایره متخارج می‌باشند}$$

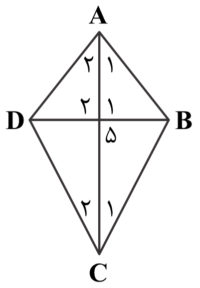
کمترین فاصله دو دایره به‌صورت زیر است:

$$d - (r_۱ + r_۲) = d - \frac{۲}{۳}d = \frac{d}{۳}$$

پس شعاع دایره‌ای که بر هر دو مماس است به‌صورت $\frac{\frac{d}{۳}}{۲}$ یعنی $\frac{d}{۶}$ است.

(فیروزی) (فصل اول ـ درس دوم ـ اوضاع نسبی دو دایره) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ اثبات گزینه «۴»:



$$\left.\begin{array}{l} AB+DC=AD+BC :\ \text{چهارضلعی محیطی است} \\ AD=AB :\ \text{فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow DC=BC$$

$$\left.\begin{array}{l} AD=AB \\ DC=BC \\ AC=AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \end{array}\right. \Rightarrow$$ AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

برای سایر گزینه‌ها می‌توان با رسم شکل مثال نقض بیان کرد.

(فیروزی) (فصل اول ـ درس سوم ـ چندضلعی‌های محاطی و محیطی) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ (فیروزی) (فصل دوم ـ تبدیل‌های هندسی و کاربردها ـ بازتاب) (آسان)

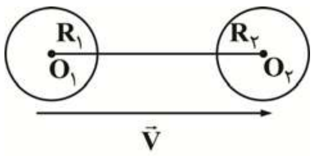
۷- گزینه «۳» ـ در حالت کلی $\underbrace{R(R(R}_{\text{۳ مرتبه}}(A)))$ یعنی نقطه A را حول نقطه O به‌اندازه 3α دوران دهیم. پس $3\alpha = 360^\circ$ یعنی $\alpha = 120^\circ$.

(فیروزی) (فصل دوم ـ دوران) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ شعاع ۲ دایره برابر است، زیرا انتقال تبدیلی طولپاست، پس: $R_1 = 3$ از طرفی طول خط المرکزین برابر طول بردار انتقال است یعنی:

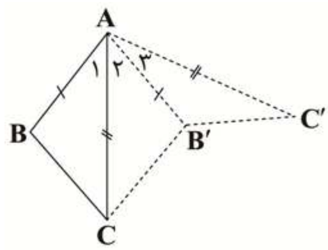
$O_1O_2 = 8$

چون $O_1O_2 > R_1 + R_2$ پس دو دایره متخارج می‌باشند.



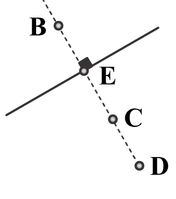
(فیروزی) (فصل دوم ـ انتقال) (متوسط)

۹- گزینه «۲» ـ زاویه‌های A_1 و A_2 و A_3 برابرند و $AB = AB'$ و $AC = AC'$، از طرفی $C\hat{A}C' = 2\hat{A}_1$ و $B\hat{A}B' = 2\hat{A}_1$، در نتیجه نقاط B' و C' به‌ترتیب دوران‌یافته نقاط B و C با اندازه زاویه $2\hat{A}_1$ حول نقطه A است، پس مثلث $AB'C'$ دوران‌یافته مثلث ABC حول نقطه A با اندازه زاویه $2\hat{A}_1$ است.



(کتاب همراه علوی) (فصل دوم ـ ترکیب دوران و بازتاب) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ نگاشت فوق به وضوح تبدیل نیست، زیرا نقاطی که بر خط d مثلاً عمودند را بر یک نقطه می‌نگارد (تصویر می‌کند) (تصویر B، A، C، D و E، نقطه E است). پس یک به یک نیست. هم‌چنین فاصله تصاویر نقطه‌های D و C نیز صفر است، پس طول را نیز حفظ نمی‌کند.



(کتاب همراه علوی) (فصل دوم ـ تبدیل و ایزومتری) (دشوار)