

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۱» -

$$x^4 - 2x^3 - 64x - 128 = x^3(x-2) - 64(x-2) = (x-2)(x^3 - 64) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4x + 16)$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - اتحادهای جبری)

۲- گزینه «۱» - عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}x : \text{ نصف عدد}$$

$$5x : \text{ ۵ برابر عدد}$$

$$\frac{1}{2}x - 5x = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - 5\right)x = 27 \Rightarrow -\frac{9}{2}x = 27$$

$$\Rightarrow x = -\frac{27 \times 2}{9} = -6 \Rightarrow x^2 = 36$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - معادله و مسائل توصیفی)

۳- گزینه «۴» - ضرایب معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = m + 4 \\ c = -(m + 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه ها}} P = \frac{C}{a} = \frac{-(m+1)}{-3} \Rightarrow \frac{-(m+1)}{-3} = 3 \Rightarrow m+1 = 9 \Rightarrow m = 8$$

m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$-3x^2 + (m+4)x - (m+1) = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 + (8+4)x - (8+1) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{طرفین معادله را بر ۳- تقسیم می‌کنیم.}$$

$$\text{با کمک اتحاد جمله مشترک} \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$$\text{تفاضل دو ریشه} = 3 - 1 = 2$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - حل معادله درجه دوم)

۴- گزینه «۲» - از طرف چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x-1)(x-2) - (x+3)(x+4)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2 + 2}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 - (x^2 + 7x + 12) = 2x^2 + 2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 - x^2 - 7x - 12 - 2x^2 - 2 = 0$$

$$-2x^2 - 10x - 12 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\text{از اتحاد جمله مشترک} : (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -2, x = -3 \quad *$$

$$x = -3 \quad \text{غیرقابل قبول است چون مخرج کسر را صفر می‌کند. بنابراین معادله فقط یک جواب دارد: } x = -2$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - معادله شامل عبارتهای گویا)

۵- گزینه «۱» - مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(-1, 2)$ ، $(-1, m^2 - m)$ با هم برابرند پس مؤلفه‌های دومیان هم باید برابر باشند:

$$m^2 - m = 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (m-2)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, m = -1$$

چون زوج مرتب $(-2, -3)$ را داریم، $m = 2$ قابل قبول نیست. چون وقتی در زوج مرتب جایگذاری می‌کنیم رابطه تابع نمی‌شود:

$$\{(-2, -3), (-2, 4), (-1, 2), (-1, 2)\}$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است:

$$\{(-2, -3), (1, 4), (-1, 2), (-1, 2)\}$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل سوم - درس اول - مفهوم تابع)

۶- گزینه «۴» - برای به‌دست آوردن $f(x-1)$ در تابع $f(x)$ به جای x ، $x-1$ قرار می‌دهیم:

$$f(x-1) = 2(x-1) - 3 = 2x - 2 - 3 = 2x - 5$$

برای به‌دست آوردن $f(-1)$ در تابع به جای x ، -1 می‌گذاریم:

$$f(-1) = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5 \Rightarrow f(x-1) - f(-1) = (2x - 5) - (-5) = 2x - 5 + 5 = 2x$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل سوم - درس دوم - ضابطه جبری تابع)

۷- گزینه «۳» - طول رأس سهمی از روی نمودار، $x_s = -1$ است:

طول رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x_s = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$-1 = -\frac{2}{2m} \Rightarrow m = 1$$

بنابراین معادله به صورت $y = x^2 + 2x - 3$ در می‌آید. محل تقاطع با محور x ها عبارت است از:

$$y = x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 1$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل سوم - درس چهارم - نمودار تابع درجه ۲)

۸- گزینه «۱» - موارد ب و پ نادرست است. مقیاس اندازه‌گیری شدت زلزله، مقیاس نسبتی است. آماره، یک مشخصه عددی است که مربوط به یک نمونه تصادفی است. پارامتر یک مشخصه عددی است که مربوط به یک جامعه آماری است.

(اکبری) (پایه دهم - فصل چهارم - درس اول - گردآوری داده‌ها)

۹- گزینه «۴» - مد مقداری از متغیر است که بیشترین فراوانی را دارد. پس a باید با یکی از داده‌ها برابر باشد تا مد داشته باشیم. از طرفی مد با میانگین برابر است:

$$\text{مد} = \text{میانگین} \Rightarrow a = \frac{10 + 17 + 18 + 23 + 5 + a + 29}{7} \Rightarrow a = \frac{102 + a}{7} \Rightarrow 7a = 102 + a$$

$$6a = 102 \Rightarrow a = 17$$

اگر داده‌ها را مرتب کنیم می‌بینیم که مد با میانگین و میانه برابر است:

$$\underbrace{5, 10, 17, 17}_{\text{میانه}}, \underbrace{18, 23, 29}$$

$$\text{مد} = \text{میانگین} = \text{میانه} = 17$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل چهارم - درس دوم - معیارهای گرایش به مرکز)

۱۰- گزینه «۲» - توان دوم انحراف معیار را واریانس می‌نامند: انحراف معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که σ^2 ، واریانس نامیده می‌شود. ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{4 + 2 + 1 + 6 + 2 + 4 + 6 + 8 + 7 + 0}{10} = 4 \Rightarrow$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-4)^2 + (2-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (8-4)^2 + (7-4)^2 + (0-4)^2}{10}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{0 + 4 + 9 + 4 + 4 + 0 + 4 + 16 + 9 + 16}{10} = \frac{66}{10} = 6.6$$

دامنه میان چارکی که با IQR نمایش داده می‌شود برابر است با $IQR = Q_3 - Q_1$ که Q_3 ، چارک سوم و Q_1 چارک اول است.

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{0, 1, 2, 2}_{Q_1}, \underbrace{4, 4}_{Q_2}, \underbrace{6, 6, 7, 8}_{Q_3}$$

$$Q_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \quad Q_2 = \frac{4+4}{2} = 4 \quad Q_3 = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1 = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = 5 \Rightarrow \sigma^2 + IQR = 5 + 6.6 = 11.6$$

(اکبری) (پایه دهم - فصل چهارم - درس سوم - معیارهای پراکنندگی)

۱۱- گزینه «۳» - نمودارهای حبابی گونه خاصی از پراکنش نگاشت است که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آن‌ها به جای

نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود. متغیر سوم در نمودار حبابی مساحت دایره را نشان می‌دهد.

(اکبری) (پایه دهم - فصل پنجم - درس دوم - نمودارهای چند متغیره)

۱۲- گزینه «۴» - طبق قانون جذب داریم:

$$q \wedge (\sim p \vee q) \equiv q \wedge (q \vee \sim p) \equiv q$$

چون گفته ارزش گزاره درست است پس ارزش q درست می‌باشد. از طرفی $\sim r$ نادرست است پس ارزش خود r درست است. در مورد ارزش p نیز نمی‌توان اظهار نظر کرد.

$$\sim q \wedge (p \vee r) \equiv \sim T \wedge (\underbrace{p \vee T}_T) \equiv F \wedge T \equiv F$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره)

۱۳- گزینه «۱» - ابتدا $p, \sim p, q, \sim q$ را در ستون‌های چپ قرار می‌دهیم. سپس $\sim p \Leftrightarrow q$ و کل گزاره را قرار می‌دهیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee (\sim q)$
T	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T

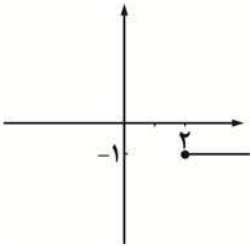
(اکبری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب شرطی و دو شرطی گزاره)

۱۴- گزینه «۲» - استدلال سؤال به شکل زیر است:

$$\begin{array}{l} \text{مقدمه ۱: اگر } p \text{ آن گاه } q \\ \text{مقدمه ۲: } p \\ \hline q \therefore \end{array}$$

پس استدلال استثنایی است و روش به کار رفته در آن قطعاً درست است. نتیجه استدلال نیز درست است چون مقدمه ۱ درست است یعنی می‌دانیم هر مربع نوعی متوازی‌الاضلاع هم می‌باشد. (اکبری) (پایه یازدهم - فصل اول - درس دوم - استدلال ریاضی)

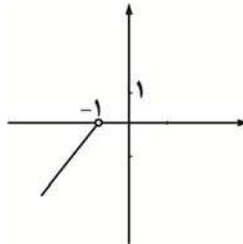
۱۵- گزینه «۳» - ابتدا در محدوده $x \geq 2$ تابع $y = -1$ را رسم می‌کنیم که یک خط افقی است.



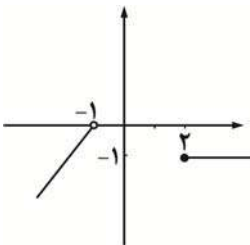
سپس در محدوده $x < -1$ تابع $y = x + 1$ را رسم می‌کنیم:

x	y = x + 1
0	1
-1	0

$$(x, y) : (0, 1), (-1, 0)$$



بنابراین نمودار گزینه «۳» به دست می‌آید:



(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس اول - تابع چند ضابطه‌ای)

۱۶- گزینه «۱» - بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: تابع $f(x) = [x]$ یک تابع چند ضابطه‌ای (بی‌نهایت ضابطه‌ای) است که ضابطه هر قسمت آن یک عدد ثابت است. پس یک تابع پلکانی است.

$$[-x] = [-2/5] = -3, -[x] = -[2/5] = -2 \Rightarrow [-x] \neq -[x]$$

$$[x+k] = [x]+k, k \in \mathbb{Z}$$

$$[x+1] = [x]+1$$

گزینه «۲»:

گزینه «۳»:

گزینه «۴»: دامنه تابع جزء صحیح، مجموعه اعداد حقیقی است.

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - تابع جزء صحیح)

۱۷- گزینه «۴» - تابع $f(x)$ ، تابع علامت است:

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

بازه $2 \leq x < 3$ زیرمجموعه‌ای از $x > 0$ حساب می‌شوند بنابراین تابع علامت در این بازه برابر ۱ است:

$$f(x) = 1$$

$$\text{اگر } 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow g(x) = 2$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = 1 - 2 = -1$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم - اعمال بر روی توابع)

۱۸- گزینه «۳» -

$$\Rightarrow \text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

$$10 = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{30} \times 100 \Rightarrow \text{تعداد بیکاران} = 3 \text{ میلیون نفر}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد شاغلین} + \text{تعداد بیکاران} = \text{جمعیت فعال}$$

$$27 = 30 - 3 = \text{تعداد شاغلین} \Rightarrow \text{تعداد شاغلین} + 3 = 30$$

$$\Rightarrow \frac{\text{تعداد شاغلین}}{\text{تعداد بیکاران}} = \frac{27}{3} = 9$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس اول - شاخص‌های آماری)

۱۹- گزینه «۱» - ساعت ۱۱ صبح بین ساعت‌های ۱۰ و ۱۲ قرار دارد:

$$A(10, 60) \quad B(12, 66) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{66 - 60}{12 - 10} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 60 = 3(x - 10) \Rightarrow y = 3x + 30 \xrightarrow{x=11} y = 3(11) + 30 = 63$$

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس دوم - درون‌یابی)

۲۰- گزینه «۳» - نمودار شکل B چون روی یک خط تغییر می‌کند و تغییرات ناگهانی ندارد.

(اکبری) (پایه یازدهم - فصل سوم - درس دوم - سری‌های زمانی)