ریاضیات

۱- گزینه «۲» ـ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$A=(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})\times\frac{۱}{۲(۲\cos^۲\alpha-۱)}=(\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha})\times\frac{۱}{۲\cos ۲\alpha}$$

$$A=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}\times\frac{۱}{۲\cos ۲\alpha}=\frac{۱}{\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha}=\frac{۲}{\sin ۴\alpha}$$

$$\alpha=۷/۵^\circ \Rightarrow A=\frac{۲}{\sin(۴\times ۷/۵^\circ)}=\frac{۲}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ ۲α)

۲- گزینه «۳» ـ با توجه به اطلاعات مسئله f یک تابع درجه دوم است. فرض می‌کنیم $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد.

$$f(g(x))=h(x)\Rightarrow ۲(ax^۲+bx+c)+۱=۴x^۲+۴x+۷$$

چون مجموع ضرایب $f(x)$ را خواسته است پس کافی است x را برابر ۱ قرار دهیم.

$$x=۱\Rightarrow ۲(a+b+c)+۱=۴+۴+۷\Rightarrow a+b+c=۷$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب)

۳- گزینه «۳» ـ با توجه به انتقال تابع $y=x^۳$ تابع فوق به‌دست آمده است پس $a=۲$ است. از طرفی تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است پس $f(۰)=۰$ است.

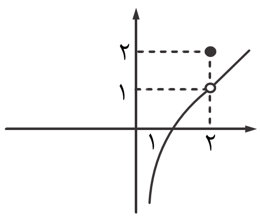
$$f(x)=-(x-۲)^۳+b \xrightarrow{(۰,۰)\in f} ۰=-(-۲)^۳+b \Rightarrow b=-۸$$

با توجه به نمودار $f(۴)=c$ است:

$$f(۴)=-(۴-۲)^۳-۸ \Rightarrow c=-(۲)^۳-۸=-۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ انتقال)

۴- گزینه «۴» ـ باتوجه به نمودار تابع غیر یکنواست.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۵- گزینه «۳» ـ

$$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=۰/۷۵ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\sin(\pi-۲\alpha)=\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۲۵}=\frac{۲۴\times ۴}{۲۵\times ۴}=\frac{۹۶}{۱۰۰}=۰/۹۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ ۲α)

۶- گزینه «۳» ـ

$$\cos ۲x+\sqrt{۳}\cos x=۲ \Rightarrow ۲\cos^۲x-۱+\sqrt{۳}\cos x-۲=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲x+\sqrt{۳}\cos x-۳=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{-\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳+۲۴}}{۲\times ۲}=\frac{-\sqrt{۳}\pm ۳\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\\ \cos x=-\sqrt{۳}\ \text{جواب حقیقی ندارد}\end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله)

۷- گزینه «۳» ـ

$$-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\cos 2x \le 3 \Rightarrow -2 \le 1+3\cos 2x \le 4 \Rightarrow \text{Max} = 4$$

$$0 \le \sin^2 5x \le 1 \Rightarrow -4 \le -4\sin^2 5x \le 0 \Rightarrow -3 \le 1-4\sin^2 5x \le 1 \Rightarrow \text{Min} = -3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ ماکزیمم و مینیمم)

۸- گزینه «۳» ـ

$$g(x) = 1-2f(x-1)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1,\ g(-1)=1-f(-2)=0 \Rightarrow f(-2)=1 \Rightarrow -8+2-m=1 \Rightarrow m=7$$

$$f(1)=1-1-m=7$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ تقسیم)

۹- گزینه «۲» ـ ابتدا علامت قدرمطلق را تعیین می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد بی‌نهایت)

۱۰- گزینه «۲» ـ کمترین مقدار تابع برابر -2π است پس $A = -2\pi$ می‌باشد. از طرفی تابع محور x ها را در -1 قطع کرده است پس:

$$A\cos(-B) = 0 \Rightarrow \cos B = 0 \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}$$

$$A+B = -2\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

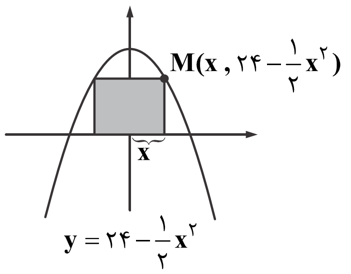
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نمودار)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x-10}{x^2+3x-10} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+5)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+5}{x+5} = \frac{4+4+5}{2+5} = \frac{13}{7}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ $\frac{0}{0}$)

۱۲- گزینه «۱» ـ



نقطه‌های روی منحنی را به‌صورت $M(x, 24-\frac{1}{2}x^2)$ در نظر می‌گیریم. مساحت مستطیل را بر حسب x حساب می‌کنیم.

$$S = 2x(24-\frac{1}{2}x^2) = 48x - x^3$$

$$S' = 48-3x^2 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 4$$

$$S_{max} = 2\times 4(24-\frac{1}{2}\times 16) = 8(16) = 128$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه‌سازی)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+2}{x^2-2x-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{-2x} = -\frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x+2}{x^2-2x-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x}{-2x} = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{۳x-|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+x}{۳x-x}=\frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x}{۳x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۴x}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۱۵- گزینه «۳» ـ فرض می‌کنیم $A=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=f'(۱)$ پس:

$$f'(x)=۲mx-۶ \Rightarrow f'(۱)=۲m-۶$$

$$A^۲+A-۶=۰ \Rightarrow f'(۱)=A=۲,-۳$$

$$\begin{cases}۲m-۶=۲\\ ۲m-۶=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_۱=۴\\ m_۲=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow m_۱+m_۲=۵/۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف و قوانین مشتق)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$$

$$f'(x)=۳\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۲\times\frac{\frac{۲x+۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲x)^۲}}(x^۲-x)-(۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{(x^۲-x)^۲}$$

$$f'(۲)=۳\left(\frac{۲}{۲}\right)^۲\times\frac{\frac{۶}{۳\times۴}(۲)-۳\times۲}{(۲)^۲}=۳\times\frac{۱-۶}{۴}=\frac{-۱۵}{۴}$$

(سراسری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق‌گیری)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=۶ \Rightarrow f'(۳)=۶$$

$$(f(\sqrt{۴-۵x}))'=-۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{۴-۵x}}\times f'(\sqrt{۴-۵x}) \underset{\overline{\overline{}}}{x=-۱} -۵\times\frac{۱}{۶}\times f'(۳)=-\frac{۵}{۶}\times۶=-۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق ترکیب)

۱۸- گزینه «۱» ـ تابع f در ریشه‌هایش مشتق ندارد پس $x=۲$ و $x=۵$ ریشه‌های معادله $x^۲+ax+b=۰$ است.

$$\left.\begin{array}{l}۵+۲=\frac{-a}{۱}\Rightarrow a=-۷\\ ۵\times۲=\frac{b}{۱}\Rightarrow b=۱۰\end{array}\right\}\Rightarrow g(x)=\sqrt[۳]{x-۷۰}$$

تابع $g(x)$ در نقطه $x=۷۰$ مشتق ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری رادیکال‌ها)

۱۹- گزینه «۳» ـ طبق تعریف مشتق، $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ برابر با مشتق چپ f در $x=۲$ است. تابع در همسایگی چپ $x=۲$ به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$x\le ۲ \Rightarrow f(x)=x^۲-۲x+۴ \Rightarrow f'(x)=۲x-۲ \Rightarrow f'_-(۲)=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق یک‌طرفه)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$h'(x)=\frac{f'(x)(۲g(x)-۱)-۲g'(x)(f(x)+۱)}{(۲g(x)-۱)^{۲}}$$

$$h'(۱)=\frac{f'(۱)(۲g(۱)-۱)-۲g'(۱)(f(۱)+۱)}{(۲g(۱)-۱)^{۲}}$$

$$h'(۱)=\frac{۳(۲\times ۱-۱)-۲\times ۲(۳+۱)}{(۲\times ۱-۱)^{۲}}=۳-۱۶=-۱۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق)

۲۱- گزینه «۱» ـ اگر ضلع مثلث a باشد آن‌گاه ارتفاع آن $h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است.

$$S=\frac{۱}{۲}ha=\frac{۱}{۲}h\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}h=\frac{۱}{\sqrt{۳}}h^{۲}$$

$$S'=\frac{۲}{\sqrt{۳}}h \Rightarrow S'(\sqrt{۳})=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای)

۲۲- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} y=x^{۳}-۹x^{۲}+۱۵x \Rightarrow y'=۳x^{۲}-۱۸x+۱۵<۰ \Rightarrow ۱\le x\le ۵ \\ y'=۳x^{۲}-۱۸x+۱۵ \Rightarrow y''=۶x-۱۸>۰ \Rightarrow x\ge ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۳\le x\le ۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق و آهنگ)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$f(۱)=-۲ \Rightarrow a+b=-۲$$

$$f'(x)=۳ax^{۲}+b\,,\,f'(۱)=۰ \Rightarrow ۳a+b=۰ \qquad \begin{cases} a+b=-۲ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=۱\,,\,b=-۳$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۲۴- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۵ \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,۲$$

مجموعه نقاط بحرانی $\{۴\,,\,-۱\,,\,۲\,,\,۰\}$ است. مقادیر آن‌ها را حساب می‌کنیم.

x	-۱	۰	۲	۴
y	۱	۵	۱	۲۱

پس مینیمم برابر ۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد ـ اکسترمم مطلق)

۲۵- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=۳x^{۴}-۸x^{۳}+۴ \Rightarrow f'(x)=۱۲x^{۳}-۲۴x^{۲}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱۲x^{۲}(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,۲$$

نقاط بحرانی $A(۰\,,\,۴)\,,\,B(۲\,,\,-۱۲)$

$$|AB|=\sqrt{۴+۱۶^{۲}}=\sqrt{۴+۲۵۶}=\sqrt{۲۶۰}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقاط بحرانی)