آمار و احتمال

۱- گزینه «۲» ــ می‌دانیم:

$$\sim (\forall x \in A : p(x)) \equiv \exists x \in A :\sim p(x)$$

بنابراین:

$$\sim (\forall x , y \in Q : \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۲\sqrt{xy}) \equiv \exists x , y \in Q : \sqrt{x} + \sqrt{y} < ۲\sqrt{xy}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس اول ــ گزاره‌ها و نقیض گزاره‌ها)

۲- گزینه «۳» ــ گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

«۱» گزینه: $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv \sim (p \wedge q) \vee p \equiv \sim p \vee \sim q \vee p \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee \sim q \equiv T \vee \sim q \equiv T$

«۲» گزینه: $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee q \equiv T \vee q \equiv T$

«۳» گزینه: $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$: ارزش این گزاره بستگی به p , q دارد.

«۴» گزینه: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv \sim p \vee \sim q \vee p \vee q \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee \underbrace{(\sim q \vee q)}_{T} \equiv T \vee T \equiv T$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس اول ــ برگزاره‌ها)

۳- گزینه «۲» ــ دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: A به دو زیرمجموعه ۱ و ۳ عضوی افراز شود. دراین‌حالت چهار روش برای افراز A وجود دارد.

(۱) $\{a\}$ ، $\{b , c , d\}$ (۲) $\{b\}$ ، $\{o , c , d\}$ (۳) $\{c\}$ ، $\{a , b , d\}$ (۴) $\{d\}$ ، $\{a , b , c\}$

حالت دوم: A به دو زیر مجموعه ۲ عضوی افراز شود. دراین‌حالت سه روش برای افراز A وجود دارد.

(۱) $\{a , b\}$ ، $\{c , d\}$ (۲) $\{a , c\}$ ، $\{b , d\}$ (۳) $\{a , d\}$ ، $\{b , c\}$

در نتیجه مجموعه A دارای ۷ افراز با دو زیر مجموعه است. (هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس دوم ــ افراز مجموعه)

۴- گزینه «۱» ــ ابتدا فرض می‌کنیم $x = ((A - C) \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ مقدار X را ساده می‌کنیم.

$$X = ((A \cap C') \cap (B \cap C')) - (A \cap B \cap C)$$
$$= (A \cap B \cap C') - (A \cap B \cap C)$$

توجه کنید که چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cap B = A$ پس:

$$X = (A \cap C') - (A \cap C) = (A \cap C') \cap (A \cap C)'$$
$$= (A \cap C') \cap (A' \cup C') = C' \cap (\underbrace{A \cap (A' \cup C')}_{\text{شبه جذب}: A \cap C'})$$
$$= C' \cap A \cap C' = A \cap C' = A - C$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس سوم ــ جبر مجموعه‌ها)

۵- گزینه «۲» ــ چون $A - B = A - (A \cap B)$ ، پس:

$$A - B = A - (A \cap B) = \{a , b , c , d , e\} - \{d , e\}$$
$$= \{a , b , c\}$$
$$\Rightarrow n(A - B) = ۳$$

از طرف دیگر، چون $n[(A - B) \times (B - A)] = ۶$ ، $n(A - B) = ۳$ پس $n(B - A) = ۲$. می‌توان نوشت:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۲ = n(B) - ۲ \Rightarrow n(B) = ۴$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ درس سوم ــ ضرب دکارتی)

۶- گزینه «۲» ــ تعداد کل حالت‌هایی که ۱۵ نفر می‌توانند وارد سالن شوند برابر !۱۵ است، یعنی $n(s) = ۱۵!$.

از طرف دیگر اگر فرد a بلندقدترین آن‌ها باشد تعداد حالت‌هایی که a اولین فرد وارد شده به سالن باشد، تعداد حالت‌ها برابر !۱۴ است، یعنی اگر A پیشامد مطلوب مسئله باشد $P(A) = ۱۴!$. بنابراین:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴!}{۱۵!} = \frac{۱}{۱۵}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل دوم ــ درس اول ــ مبانی احتمال)

۷- گزینه «۴» ـ بنابر قوانین احتمال می‌توان نوشت:

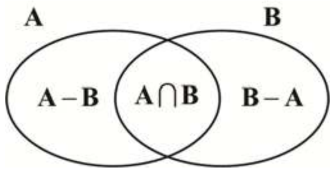
$$\begin{cases} P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{7}{21} \\ P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{8}{21} \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} P(B)-P(A)=\frac{1}{21}$$

$$\xrightarrow{P(B)=\frac{13}{12}P(A)} \frac{13}{12}P(A)-P(A)=\frac{1}{21} \Rightarrow P(A)=\frac{12}{21}$$

در نتیجه از $P(A)-(A\cap B)=\frac{7}{21}$, $P(A)=\frac{12}{21}$ به‌دست می‌آید:

$$P(A\cap B)=\frac{5}{21}$$

اکنون با استفاده از نمودار مقابل می‌توان نوشت:



$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)$$
$$=\frac{7}{21}+\frac{5}{21}+\frac{8}{21}=\frac{20}{21}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ مبانی احتمال)

۸- گزینه «۲» ـ می‌دانیم $p(z)=\frac{7}{12}$. بنابراین $p(y)=\frac{7}{12}-d$ و $p(x)=\frac{7}{12}-2d$. از طرف دیگر $p(x)+p(y)+p(z)=1$، پس:

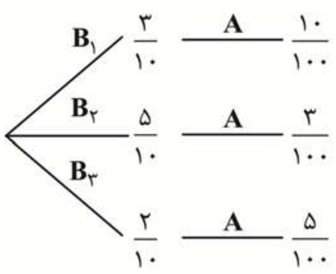
$$\frac{7}{12}-2d+\frac{7}{12}-d+\frac{7}{12}=1 \Rightarrow \frac{21}{12}-3d=1 \Rightarrow \frac{7}{4}-3d=1 \Rightarrow d=\frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$p(x)=\frac{7}{12}-2d=\frac{7}{12}-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ احتمال غیرهم شانس)

۹- گزینه «۱» ـ فرض کنید B_1 ، B_2 , B_3 ، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد و پیشامد A هم لکه‌دار بودن سیب باشد، دراین‌صورت:

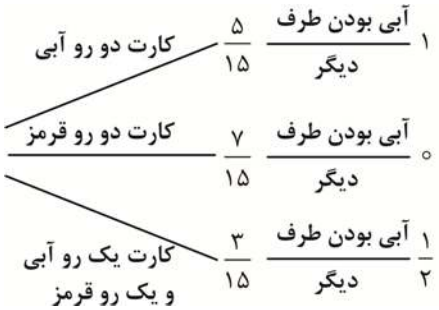


بنابراین:

$$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{10}{100}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{100}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{100}=\frac{55}{1000}=0/055$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ احتمال کل)

۱۰- گزینه «۲» ـ نمودار درختی زیر را رسم می‌کنیم.



اکنون اگر A احتمال آبی بودن طرف دیگر کارت فرض شود، بنابر قانون بیز به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{\frac{۵}{۱۵}\times ۱}{\frac{۵}{۱۵}\times ۱+\frac{۷}{۱۵}\times ۰+\frac{۳}{۱۵}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۰}{۱۳}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ قانون بیز)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض کنید تعداد مهره‌های سفید برابر x باشد، بنابراین تعداد مهره‌های سیاه $۲x$ است. بنابر فرض مسئله:

$$p(\text{سیاه بودن مهره اول})\times p(\text{سیاه بودن مهره دوم}\mid\text{سیاه بودن مهره اول})=\frac{۲۲}{۵۱}$$

$$\Rightarrow\ \frac{۲x}{۳x}\times\frac{۲x-۱}{۳x-۱}=\frac{۲۲}{۵۱}\ \Rightarrow\ \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x-۱}{۳x-۱}\right)=\frac{۲۲}{۵۱}$$
$$\Rightarrow\ x=۶$$

بنابراین تعداد کل مهره‌ها برابر $۳n=۱۸$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس چهارم ـ انتخاب بدون جایگذاری)

۱۲- گزینه «۲» ـ برای آن‌که مد یکتا نباشد، باید فراوانی‌ها را برابر قرار دهیم و سپس جدول را بررسی کنیم.

حالت اول: فرض کنید $۲m-۱=۳$ یعنی $m=۲$. در این حالت مُد برابر عدد یکتای ۹ است.

گروه خونی	O	A	B	AB
تعداد	۳	۳	۰	۹

حالت دوم: فرض کنید $۲m-۱=۹$ یعنی $m=۵$. در این حالت مُد برابر ۹ است و یکتا نیست.

گروه خونی	O	A	B	AB
تعداد	۳	۹	۳	۹

حالت سوم: فرض کنید $m-۲=۳$ یعنی $m=۵$، در این حالت مد برابر ۹ است و یکتا نیست.

گروه خونی	O	A	B	AB
تعداد	۳	۹	۳	۹

حالت چهارم: فرض کنید $m-۲=۹$ یعنی $m=۱۱$. در این حالت مد برابر ۲۱ است و یکتاست. بنابراین فقط در حالت $m=۵$ مُد یکتا نیست.

گروه خونی	O	A	B	AB
تعداد	۳	۲۱	۹	۹

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ مُد)

۱۳- گزینه «۱» ـ چون جمع و تفریق اثری در مقدار واریانس ندارد پس از هر سه داده ۱۳۱۴۲۵ را کم می‌کنیم تا داده‌ها تبدیل به صفر، ۲ و ۴ شوند. با این کار داده‌ها کوچک شده و ضمناً واریانس هم تغییر نمی‌کند. اکنون می‌توان نوشت:

$$\bar{x}=\frac{۰+۲+۴}{۳}=۲$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{(۰-۲)^۲+(۲-۲)^۲+(۴-۲)^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}=۲/۶۷$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ واریانس و نکات آن)

۱۴- گزینه «۱» ـ درحالتی‌که اندازه نمونه برابر n باشد، $\frac{\sigma}{x}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و این‌که $\sigma = ۱۵$ و $n = ۲۵$، بنابراین:

$$\frac{\sigma}{x}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ برآورد نقطه‌ای)