حسابان

۱- گزینه «۳» ـ اگر نقطه $A(۳\,,\,m)$ روی تابع $y=۱-۲f(۱-x)$ قرار گیرد باید در آن صدق کند.

$$m=۱-۲f(۱-۳)\ \Rightarrow\ f(-۲)=\frac{۱-m}{۲}\ \Rightarrow\ (-۲\,,\frac{۱-m}{۲})\in f(x)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیلات تابع)

۲- گزینه «۳» ـ نقطه A روی خط گذرا از $O(۰\,,۰)$ و $B(-۱\,,۲)$ قرار دارد. معادله آن را می‌نویسیم.

$$y-۲=\frac{۲}{-۱}(x+۱)\ \Rightarrow\ y=-۲x\ \xrightarrow{y=-۱}\ x=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ A(\frac{۱}{۲}\,,-۱)\in f(x)$$

اگر طول نقاط تابع $f(x)$ را نصف کنیم تابع $f(۲x)$ به دست می‌آید در ادامه عرض نقاط $f(۲x)$ را قرینه کرده و یک واحد به آن‌ها اضافه می‌کنیم. مختصات نقطه متناظر با A برابر $A'(\frac{۱}{۴}\,,۲)$ خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع)

۳- گزینه «۲» ـ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{m}{m+۱}+\frac{۱}{۲m+۱}}{۱-\frac{m}{m+۱}\times\frac{۱}{۲m+۱}}=\frac{۲m^۲+۲m+۱}{(m+۱)(۲m+۱)-m}=\frac{۲m^۲+۲m+۱}{۲m^۲+۳m+۱-m}=\frac{۲m^۲+۲m+۱}{۲m^۲+۲m+۱}=۱$$

از طرفی، چون $\frac{\pi}{۲}>\beta\,,\alpha>۰$ پس $\pi>\alpha+\beta>۰$ بنابراین:

$$\tan(\alpha+\beta)=۱\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ روابط $\alpha\pm\beta$)

۴- گزینه «۲» ـ

$$\cot(\frac{۷\pi}{۲}-\beta)=۲\ \Rightarrow\ \cot(\frac{\pi}{۲}-\beta)=۲\ \Rightarrow\ \tan\beta=۲$$

$$\tan(\pi+\alpha+\beta)=۴\ \Rightarrow\ \tan(\alpha+\beta)=۴\ \Rightarrow\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=۴$$

$$\Rightarrow\ \frac{\tan\alpha+۲}{۱-۲\tan\alpha}=۴\ \Rightarrow\ ۴-۸\tan\alpha=\tan\alpha+۲\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\frac{۲}{۹}$$

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times\frac{۲}{۹}}{۱-\frac{۴}{۸۱}}=\frac{۳۶}{۷۷}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ روابط ۲α)

۵- گزینه «۴» ـ

$$\frac{۲\pi}{|a+۱|\pi}=\frac{۲}{۷}\ \Rightarrow\ |a+۱|=۷\ \Rightarrow\ \begin{cases}a+۱=۷\ \Rightarrow\ a=۶\\ a+۱=-۷\ \Rightarrow\ a=-۸\end{cases}$$

چون $a<۰$ است، پس:

$$f(x)=-۸+\sin(-۷\pi x)\ \Rightarrow\ \min(f(x))=-۸-۱=-۹$$

تذکر: کمترین مقدار تابع $y=a\sin bx+c$ برابر $-|a|+c$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ دوره تناوب)

۶- گزینه «۳» ـ

$$\cos۲x-\cos x+۱=۰\ \Rightarrow\ ۲\cos^۲x-۱-\cos x+۱=۰\ \Rightarrow\ ۲\cos^۲x-\cos x=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\ \xrightarrow{x\in[۰\,,۲\pi]}\ x=۰\,,۲\pi\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\ \xrightarrow{x\in[۰\,,۲\pi]}\ x=\frac{\pi}{۳}\,,۲\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$۰+۲\pi+\frac{\pi}{۳}+۲\pi-\frac{\pi}{۳}=۴\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله مثلثاتی)

۷- گزینه «۲» ـ کمترین مقدار تابع برابر -۲π است پس $A=-۲\pi$ می‌باشد. از طرفی تابع محور x ها را در -۱ قطع کرده است پس:

$$A\cos(-B)=۰ \Rightarrow \cos B=۰ \Rightarrow B=\frac{\pi}{۲}$$

$$A+B=-۲\pi+\frac{\pi}{۲}=-\frac{۳\pi}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ نمودار)

۸- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{۳x-|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+x}{۳x-x}=\frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+|x|}{۳x-|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x}{۳x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{۴x}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد در بی‌نهایت)

۹- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۷}{x^۲+۳x-۴}$$

مجانب قائم : $x^۲+۳x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{ق ق} \\ x=-۴ & \text{ق ق} \end{cases}$

مجانب افقی $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲+۷}{x^۲+۳x-۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲ \Rightarrow y=۲$$

پس نقطه تلاقی مجانب‌ها $A(۱,۲)$ و $B(-۴,۲)$ است. پس:

$$AB=\sqrt{۲۵+۰}=۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ مجانب)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{m}{m+۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳m+۳=۲m \Rightarrow m=-۳$$

$$(m+۱)x^۳+۱۶=۰ \xrightarrow{m=-۳} -۲x^۳+۱۶=۰ \Rightarrow x=۲$$ مجانب قائم

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ مجانب)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=۶ \Rightarrow f'(۳)=۶$$

$$(f(\sqrt{۴-۵x}))'=-۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{۴-۵x}}\times f'(\sqrt{۴-۵x}) \;\underset{=\!=}{x=-۱}\; -۵\times\frac{۱}{۶}\times f'(۳)=-\frac{۵}{۶}\times۶=-۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق ترکیب)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} y=x^۳-۹x^۲+۱۵x \Rightarrow y'=۳x^۲-۱۸x+۱۵<۰ \Rightarrow ۱\le x\le ۵ \\ y'=۳x^۲-۱۸x+۱۵ \Rightarrow y''=۶x-۱۸>۰ \Rightarrow x\ge ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۳\le x\le ۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق و آهنگ)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$f(۱) = -۲ \Rightarrow a + b = -۲$

$f'(x) = ۳ax^۲ + b \, , f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۰$

$\begin{cases} a + b = -۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ , b = -۳$

$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f′		+	۰	−	۰	+	

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۵ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ , ۲$

مجموعه نقاط بحرانی $\{۴ , ۱- , ۲ , ۰\}$ است. مقادیر آن‌ها را حساب می‌کنیم.

x	−۱	۰	۲	۴
y	۱	۵	۱	۲۱

پس مینیمم برابر ۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد ـ اکسترمم مطلق)

۱۵- گزینه «۲» ـ نقطه عطف را حساب می‌کنیم:

$y = \frac{x^۳}{۳} - ۲x^۲ + \frac{۱}{۳}$

$x_I = \frac{-b}{۳a} = \frac{۲}{۱} = ۲ \Rightarrow I(۲ , -۵)$

$y' = x^۲ - ۴x \Rightarrow y'(۲) = ۴ - ۸ = -۴$ شیب خط مماس

خط مماس: $y + ۵ = -۴(x - ۲) \xrightarrow{x=۰} y = ۳$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ عطف)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$y = \frac{۳x^۳ - ۲x^۲ - ۱}{x^۲} = ۳x - ۲ - \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow y' = ۳ + \frac{۲}{x^۳} \Rightarrow y'' = \frac{-۶}{x^۴} < ۰ \Rightarrow x \in \varnothing$

در هیچ بازه‌ای تقعر منحنی رو به بالا نیست. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ تقعر)