

**حسابان**

۱- گزینه «۴» - تابع مورد نظر یک تابع نمایی به فرم  $a^x$  با شرط  $a > 1$  است. پس:

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow f(x) = 1^x \\ m = 3 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{cases}$$

بنابراین  $m = 1$  قابل قبول است و  $f(x) = 1^x$  خواهد بود پس  $f(1+m) = f(2) = 2$  یعنی ۴ خواهد بود. (نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - تابع نمایی) (آسان)

۲- گزینه «۴» -

$$(1 + \sqrt{2})^{x^2} < (1 + \sqrt{2})^{4x} \xrightarrow{1 + \sqrt{2} > 1} x^2 < 4x \Rightarrow \underbrace{x(x^2 - 4)}_{p(x)} < 0$$

x	-2	0	2
p(x)	-	+	-

$$p(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - نامعادله نمایی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$\log_b a = A \Rightarrow A + \frac{1}{A} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A^2 + 1}{A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3A^2 - 1 \cdot A + 3 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_b a = 3 \Rightarrow a = b^3 \Rightarrow B = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{6}{3} \\ \log_b a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = a^3 \Rightarrow B = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{6}{3} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - لگاریتم) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -

$$\log_3(\log_2(1 - \log_4 x)) = -2 \Rightarrow \log_2(1 - \log_4 x) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \log_4 x = 2^{\frac{1}{9}} \Rightarrow \log_4 x = 1 - 2^{\frac{1}{9}} \Rightarrow x = 4^{1 - 2^{\frac{1}{9}}}$$

$$\Rightarrow x \times 2^{1 + 2^{\frac{1}{9}}} = 4^{1 - 2^{\frac{1}{9}}} \times 2^{1 + 2^{\frac{1}{9}}} = 2^{2 - 2^{\frac{1}{9}}} \times 2^{1 + 2^{\frac{1}{9}}} = 2^{3 - 2^{\frac{1}{9}}} = 2^2 = 4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - لگاریتم) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} 2 \log a + \log b = 2 \\ 3 \log a + 2 \log b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log a = 1 \\ \log b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - لگاریتم) (آسان)

۶- گزینه «۳» -

$$\log_4 \sqrt{v} = A \Rightarrow \frac{1}{2} \log_4 v = A \Rightarrow \log_4 v = 2A$$

$$\log_{2\sqrt{2}} \sqrt{v} = \frac{\log \sqrt{v}}{\log 2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} \log v}{\frac{1}{2} \log 2 + \log v} = \frac{\frac{1}{2} \log v}{\frac{1}{2} + \log v} = \frac{\frac{1}{2} \times 2A}{\frac{1}{2} + 2A} = \frac{A}{2(1+A)}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - لگاریتم) (متوسط)

۷- گزینه «۲» -

$$ax + c = 0 \xrightarrow{x=-4} -4a + c = 0 \Rightarrow c = 4a$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + \log_4 c = 0 \Rightarrow \log_4 c = -a \Rightarrow c = 4^{-a} \Rightarrow 4^a \times c = 1$$

$$\xrightarrow{c=4a} 4^a \times 4a = 1 \Rightarrow a \times 4^a = \frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - نمودار لگاریتم) (متوسط)

۸- گزینه «۱» -

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/\lambda + 1/\Delta M_1 \\ \log 1 \cdot E_1 = 11/\lambda + 1/\Delta M_2 \end{cases} \xrightarrow{-} \log 1 \cdot E_1 - \log E_1 = 1/\Delta (M_2 - M_1)$$

$$\Rightarrow \log \frac{1 \cdot E_1}{E_1} = 1/\Delta (M_2 - M_1) \Rightarrow M_2 - M_1 = \frac{1}{1/\Delta} = \frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - فصل سوم - کاربرد لگاریتم) (متوسط)

۹- گزینه «۱» -

$$f(x) = ax + b \Rightarrow xf(x) = ax^2 + bx$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x - 2} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2f(2) = 4 \\ f(2) + 2f'(2) = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 2a + b + 2a = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a + b = \lambda \end{cases} \xrightarrow{-} a = 2, b = -4 \Rightarrow f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(1) = -1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - تعریف مشتق) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - تابع  $f$  در  $x = 4$  پیوستگی راست دارد زیرا:

$$f(4) = -1, \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[-\frac{4}{x}\right] \tan \frac{\pi}{x} = \left[-\frac{4}{4^+}\right] = -1$$

در همسایگی راست  $x = 4$  براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم. سپس مشتق تابع  $f(x)$  را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = -\tan \frac{\pi}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{x^2} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{x}) \Rightarrow f'_+(4) = \frac{\pi}{4}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - توابع مثلثاتی و مشتق‌پذیری) (دشوار)

۱۱- گزینه «۳» -

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + ax \Rightarrow f'(x) = x^3 - x + a$$

$$f'(\cos \alpha) = 0 \Rightarrow \cos^3 \alpha - \cos \alpha + a = 0$$

$$\Rightarrow a = \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

$$f''(a) = f''(\cos \alpha \sin^2 \alpha) = 3(\cos \alpha \sin^2 \alpha)^2 - 1 = 3 \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha - 1$$

$$= 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha - 1 = \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha - 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - مشتق مثلثاتی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۴» -  $X = 2$  در  $f(x)$  پیوسته است.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 + a \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = b \times (-2) \times 2 = -12b$$

$$1 + a = -12b \Rightarrow a + 12b = -1 \quad (1)$$

مشتق چپ و راست  $f(x)$  در  $x = 2$  برابر است.

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) = x - 1 + a \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f'_-(2) = 1$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) = -3bx^2 \Rightarrow f'(x) = -6bx \Rightarrow f'_+(2) = -12b$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -12b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{12} \xrightarrow{(1)} a = 0 \Rightarrow a + b = \frac{-1}{12}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» - راه اول:

$$f(x) = y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 y - y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y + 1}{y - 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{-2}{3\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3}} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = -\frac{2}{3}$$

راه دوم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x^2 - 1)^2} (2x^2) \Rightarrow f'(-1) = \frac{-2}{2} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{-2}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - مشتق‌گیری) (دشوار)

۱۴- گزینه «۱» -

$$g^{-1}(1 + f(3x - 1)) = x^2 + 1 \Rightarrow 1 + f(3x - 1) = g(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 3f'(3x - 1) = 3x^2 g'(x^2 + 1) \xrightarrow{x=1} f'(2) = g'(2) \Rightarrow \frac{f'(2)}{g'(2)} = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» -

$$f'(x) = \frac{-\gamma}{3\sqrt{\left(\frac{x+\lambda}{x+1}\right)^2}} + \frac{1}{(3+x)^2} \cos \frac{\pi}{3+x}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{-\gamma}{12} + \frac{1}{18} = \frac{-2\gamma + 2}{36} = \frac{-19}{36}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ لحظه‌ای) (متوسط)

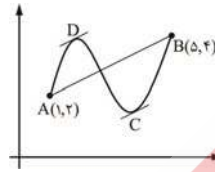
۱۶- گزینه «۱» - نقطه  $M$  را به صورت  $M(x, x^2)$  در نظر می‌گیریم.

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + x^4}$$

$$d' = \frac{2x + 4x^3}{2\sqrt{x^2 + x^4}} \Rightarrow d'(1) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ تغییر) (متوسط)

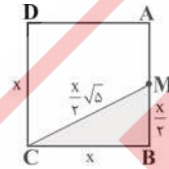
۱۷- گزینه «۳» - شیب خط واصل AB برابر  $\frac{1}{3}$  است. پس جواب‌های معادله  $f'(x) = \frac{1}{3}$  تعداد نقاطی است که آهنگ لحظه‌ای تابع  $f(x)$  برابر آهنگ متوسط تابع در بازه  $[1, 5]$  را نشان می‌دهد.



با توجه به نمودار در دو نقطه C و D خط مماس بر تابع موازی پاره‌خط AB است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ تغییر) (دشوار)

گزینه «۳» - ۱۸



$$CM = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$$

محیط را  $f(x)$  فرض می‌کنیم.

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ تغییر) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» - آهنگ لحظه‌ای این تابع در وسط بازه برابر آهنگ متوسط است.

$$m = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ تغییر) (متوسط)

گزینه «۴» - ۲۰

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \alpha = 4 \sin \alpha$$

$$S(\alpha) = 4 \sin \alpha \Rightarrow S'(\alpha) = 4 \cos \alpha \Rightarrow S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - فصل چهارم - آهنگ تغییر) (متوسط)