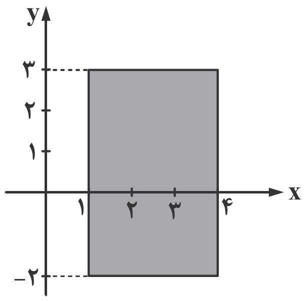
## هندسه

۱- گزینه «۳» ـ نمودار رابطه $-۲ \le y \le ۳$ و $۱ \le x \le ۴$ به صورت زیر است:




به سادگی دیده می‌شود که این شکل مستطیل است. به طول و عرض ۳ و ۵، بنابراین مساحت این ناحیه برابر است با:

$$S = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ نمودار نامعادلات)

۲- گزینه «۳» ـ واضح است که در نقطه A، طول و عرض اعدادی مثبت و ارتفاع عددی منفی است، پس این نقطه در ناحیه پنجم قرار دارد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ نقطه در فضا)

۳- گزینه «۴» ـ نقطه‌ای که روی محور yها است، طول و ارتفاع صفر دارد، پس:

$$\begin{cases} ۳a - b = ۰ \\ b + ۴a - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۳ \end{cases}$$

با قرار دادن این اعداد در نقطه M به دست می‌آید:

$$M = (۰ , ۰ , ۰)$$

پس نقطه M مبدأ مختصات است. (کتاب همراه علـوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مختصات نقطه در فضا)

۴- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$|AC| = \sqrt{۱۶ + ۱ + a^۲} = \sqrt{۱۷ + a^۲}$$

$$|BC| = \sqrt{۱ + ۱۶ + (a-۱)^۲} = \sqrt{۱۷ + (a-۱)^۲}$$

چون $|AC| = |BC|$، پس:

$$\sqrt{۱۷ + a^۲} = \sqrt{۱۷ + (a-۱)^۲} \Rightarrow ۱۷ + a^۲ = ۱۷ + (a-۱)^۲ \Rightarrow a = \pm(a-۱) \Rightarrow \begin{cases} a = a - ۱ \quad \times \\ a = -a + ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ فاصله‌ی بین نقاط)

۵- گزینه «۱» ـ تصویر $A = (۴ , ۱ , -۲)$ بر صفحه xy نقطه $A' = (۴ , ۱ , ۰)$ و قرینه نقطه $A = (۴ , ۱ , -۲)$ نسبت به صفحه yz نقطه $A'' = (۰ , ۱ , -۲)$ است، بنابراین مختصات وسط پاره‌خط $A'A''$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A'A'' \text{ وسط} = \frac{A' + A''}{۲} = \frac{(۴,۱,۰) + (۰,۱,-۲)}{۲} = (۲,۱,-۱)$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ تصویر و قرینه نقطه)

۶- گزینه «۴» ـ بردار مورد نظر را $a=(x,y,z)$ در نظر می‌گیریم. بنابر فرض می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix} xy \text{ تصویر } a \text{ بر صفحه } = (x\,,y\,,0) \\ xz \text{ تصویر } a \text{ بر صفحه } = (x\,,0\,,z) \\ yz \text{ تصویر } a \text{ بر صفحه } = (0\,,y\,,z) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13} \\ \sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{12} \\ \sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{7} \end{cases} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2+z^2=12 \\ y^2+z^2=7 \end{cases} \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{با هم جمع}} 2(x^2+y^2+z^2)=32$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2+z^2=16 \ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$$

یعنی $|a|=4$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بردار، طول بردار، تصویر بردار بر صفحات)

۷- گزینه «۴» ـ شرط توازی دو بردار آن است که دو بردار مضرب یکدیگر باشند. با مشاهده مختص x در دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نتیجه می‌گیریم $\vec{a}=3\vec{b}$، پس:

$$\begin{cases} 3n=-2 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-\dfrac{2}{3} \\ m=3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$m+n=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شرط توازی در بردار، ضرب عدد در بردار)

۸- گزینه «۱» ـ می‌دانیم دو قطر متوازی‌الاضلاع ایجاد شده روی دو بردار a و b عبارتند از $a+b$ و $a-b$:

$$a+b=(-3,0,4)\ \Rightarrow\ |a+b|=\sqrt{9+0+16}=5$$

$$a-b=(5\,,4\,,-6)\ \Rightarrow\ |a-b|=\sqrt{25+16+36}=\sqrt{77}$$

پس طول کوچک‌ترین قطر این متوازی‌الاضلاع برابر ۵ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ طول بردار، قطرهای متوازی‌الاضلاع)

۹- گزینه «۲» ـ می‌توان نوشت:

$$3\vec{a}=(9\,,6\,,-3)\,,\ b-2c=(2\,,1\,,0)-(2\,,6\,,4)=(0\,,-5\,,-4)$$

در نتیجه:

$$(3a)\cdot(b-2c)=(9\,,6\,,-3)\cdot(0\,,-5\,,-4)=0-30+12=-18$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ویژگی ضرب داخلی)

۱۰- گزینه «۲» ـ چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$، بنابراین:

$$m-4+3m-3=0 \Rightarrow m=\frac{7}{4}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی)

۱۱- گزینه «۲» ـ چون بردار b موازی بردار c است، پس b مضرب c است و $b=(2m\,,-m\,,2m)$ اکنون از $a\cdot b=3$ به‌دست می‌آید:

$$(2\,,1\,,-3)\cdot(2m\,,-m\,,2m)=3$$

$$4m-m-6m=3 \Rightarrow m=-1$$

در نتیجه $b=(-2\,,1\,,-2)$، بنابراین:

$$|b|=\sqrt{4+1+4}=3$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی)

۱۲- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$|2a-3b|^2=4|a|^2+9|b|^2-12a\cdot b=4\times9+9\times4-12\times3\times2\times\cos60^\circ=36+36-12\times3\times2\times\frac{1}{2}=36$$

بنابراین $|2a-3b|=6$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی، اتحادها)

۱۳- گزینه «۱» ـ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(۱,۴,۰),\mathbf{b}=(۱,-۱,۱)$$

اکنون $\alpha$ زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ و $\mathbf{b}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{b}-(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{|\mathbf{b}||\mathbf{a}-\mathbf{b}|}=\frac{۱-۴+۰}{\sqrt{۳}\sqrt{۱۷}}=-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$$

(کتاب همراه علــوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی، زاویه‌ی بین دو بردار)

۱۴- گزینه «۱» ـ اگر $\mathbf{a}'$ تصویر $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b}$ باشد، می‌دانیم $\mathbf{a}'=(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^۲})\mathbf{b}$، بنابراین:

$$|\mathbf{a}'|=|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}|=|\frac{(۱,۳,۵)\cdot(۱,۲,-۲)}{\sqrt{۱+۴+۴}}|=|\frac{۱+۶-۱۰}{۳}|=۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی، تصویر قائم بردار به بردار دیگر)

۱۵- گزینه «۱» ـ نامساوی کوشی شوارتز را برای دو بردار $\vec{a}=(x,y,z)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ می‌نویسیم:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \Rightarrow ۶\le|\mathbf{a}|\sqrt{۱+۴+۱} \Rightarrow \sqrt{۶}\le|\mathbf{a}|$$

بنابراین کمترین مقدار $\mathbf{a}$ برابر $\sqrt{۶}$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ نامساوی کوشی شوارتز)