ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ فرد b در طبقه دوم قرار می‌گیرد. طبق فرض فرد a تنها می‌تواند ساکن یکی از طبقات ۳، ۴، ۵ یا ۶ است. بنابراین تعداد کل حالات‌ها برابرند با:

$$\underset{\text{انتخاب b}}{\underset{\downarrow}{1}} \times \underset{\text{انتخاب طبقه a}}{\underset{\downarrow}{\binom{4}{1}}} \times \underset{\text{جایگشت سایر افراد}}{\underset{\downarrow}{4!}} = 1 \times 4 \times 24 = 96$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ یادآوری ترکیبیات)

۲- گزینه «۳» ـ برای ساختن عددی مطلوب، ابتدا سه تا از رقم‌های فرد، یعنی سه تا از ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ و دو تا از رقم‌های زوج، یعنی دو تا از ۲، ۴، ۶ و ۸ را انتخاب می‌کنیم، سپس با رقم‌های انتخاب شده عدد پنج رقمی را می‌سازیم، بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \times 5! = 10 \times 6 \times 120 = 7200$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ یادآوری ترکیبیات)

۳- گزینه «۳» ـ چهار رقم زوج را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم. طبق قضیه جایگشت تکرار این بسته را به $4 = \frac{4!}{3!}$ طریق می‌توانیم تشکیل دهیم. تعداد جایگشت‌های این بسته به همراه شش رقم فرد نیز برابر $105 = \frac{7!}{2!4!}$ است.

$$\boxed{4446}, 3, 3, 3, 3, 5, 5$$

در نتیجه پاسخ برابر $220 = 4 \times 105$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ جایگشت با تکرار)

۴- گزینه «۲» ـ کل جایگشت‌های ۸ نفر عبارت از !۸ است. چون سه نفری که در اتاق سه نفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان سه نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی چهار نفر در اتاق چهار نفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر !۳ و !۴ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه جایگشت با تکرار برابر با $280 = \frac{8!}{4! \times 3!}$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ جایگشت با تکرار)

۵- گزینه «۳» ـ به ازای مقادیر مختلف برای x_3 مسئله را حل می‌کنیم:

$$(1)\ x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{5}{2} = 10$$

$$(2)\ x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{4}{2} = 6$$

$$(3)\ x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{3}{2} = 3$$

$$(4)\ x_3 = 9 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب} = 1$$

بنابراین کل جواب‌های این معادله برابر است با:

$$10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ معادله سیاله خطی)

۶- گزینه «۱» ـ پاسخ برابر تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

است؛ یعنی برابر است با:

$$\binom{9-1}{6-1} = \binom{8}{5} = 56$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ معادله سیاله)

۷- گزینه «۱» ـ فرض کنید مربع لاتین A به شکل زیر باشد.

$A =$

a	۳	b	x
۱	c	۲	
		۱	

چون در مربع لاتین A، در هیچ سطر یا ستونی عدد تکراری وجود ندارد و هریک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ باید در هر سطر یا ستون A ظاهر شوند، نتیجه می‌گیریم:

$b \neq ۱ , b \neq ۲ , b \neq ۳ \;\Rightarrow\; b = ۴$

$c \neq ۱ , c \neq ۲ , c \neq ۳ \;\Rightarrow\; c = ۴$

$a \neq ۱ , a \neq ۳ , a \neq b = ۴ \;\Rightarrow\; a = ۲$

$x \neq ۳ , x \neq a = ۲ , x \neq b = ۴ \;\Rightarrow\; x = ۱$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مربع لاتین)

۸- گزینه «۲» ـ ابتدا توجه کنید که در ماتریس A، عدد y برابر ۲ است، چون عدد ۲ باید در سطر سوم A ظاهر شود. همچنین اگر در این سطر اگر عدد ۲ در یکی از خانه‌های اول، دوم یا سوم ظاهر شود، در ستون مورد نظر عدد ۲ تکرار می‌شود.

$A =$

۲			
		۲	
			y
	۲		

$B =$

۴			
		۱	
			۳
	x		

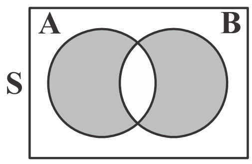
اکنون اگر A و B را کنار یکدیگر قرار دهیم، مربع مقابل حاصل می‌شود:

۲۴			
		۲۱	
			۲۳
	۲x		

چون A و B متعامد هستند، پس در این مربع هیچ زوج مرتبی نباید تکرار شود، در نتیجه x باید برابر ۲ باشد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مربع لاتین متعامد)

۹- گزینه «۲» ـ فرض کنید:



$S = \{۱ , ۲ , ۳ , \cdots , ۲۰۰\}$

$A = \{n \in S ; ۱۰ \mid n\}$

$B = \{n \in S ; ۶ \mid n\}$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$= (|A - B|) + (|B - A|) = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B|$$

$$= |A| + |B| - ۲|A \cap B| = [\frac{۲۰۰}{۱۰}] + [\frac{۲۰۰}{۶}] - ۲ \times [\frac{۲۰۰}{۳۰}] = ۳۳ + ۲۰ - ۲ \times ۶ = ۴۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول)

۱۰- گزینه «۴» ـ افراد را $a_۱ , a_۲ , \cdots , a_۸$ و جایزه‌ها را $A_۱ , A_۲ , A_۳ , A_۴$ می‌نامیم. حل این مسئله معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از $A = \{A_۱ , A_۲ , A_۳ , A_۴\}$ به $B = \{a_۱ , a_۲ , \cdots , a_۸\}$ است، که برابر است با $۸^۴$ یعنی $۲^{۱۲}$.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول، شمارش توابع)

۱۱- گزینه «۳» ـ اگر $۱۳۲ = ۱۲ \times ۱۱$ نفر در این انجمن شرکت کنند در بدترین شرایط ۱۱ نفر در یک ماه سال متولد شده‌اند، امّا اگر $۱۳۳ = ۱ + ۱۳۲$ نفر انتخاب شوند، حداقل ۱۲ نفر وجود دارند که در یک ماه سال متولد شده‌اند، پس حداقل باید $۱۳۳ - ۷۰ = ۶۳$ نفر به این جمع اضافه کرد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه کبوتر)

۱۲- گزینه «۳» ـ هر دو تایی مرتب که انتخاب شود به یکی از چهار حالت زیر است:

(فرد و فرد)، (زوج و فرد)، (فرد و زوج)، (زوج و زوج)

برای اینکه $a + c$ و $b + d$ هر دو زوج باشند، باید حداقل دو زوج مرتب هم‌شکل داشته باشیم، بنابراین باید حداقل ۵ زوج مرتب انتخاب کنیم.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه کبوتر)

۱۳- گزینه «۴» ـ مجموعه موردنظر را به صورت زوج‌های مرتبی که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها برابر ۱۴ است، به همراه عدد ۷ دسته‌بندی می‌کنیم:

(۲ , ۱۲) , (۳ , ۱۱) , (۴ , ۱۰) , (۵ , ۹) , (۶ , ۸) , ۷

تعداد دسته‌های بالا برابر ۶ است. پس اگر ۶ عدد از مجموعه موردنظر انتخاب کنیم، ممکن است در بدترین حالت از هریک از زوج‌های مرتب فوق یک عدد و عدد ۷ انتخاب شوند که مجموع هیچ دو عضوی از آن‌ها برابر ۱۴ نیست. پس اگر حداقل ۷ = ۱ + ۶ عدد از مجموعه موردنظر انتخاب کنیم، با اطمینان می‌توان گفت که حداقل از یکی از زوج‌های مرتب فوق، هر دو مؤلفه انتخاب شده‌اند، بنابراین می‌توانیم مطمئن باشیم که در بین اعضای زیرمجموعه‌های حداقل ۷ عضوی حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۱۴ ست.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه کبوتر)

۱۴- گزینه «۳» ـ با توجه به فرض مسئله اگر ۶ گوی از کیسه خارج کنیم، ممکن است بین اعداد خارج شده، هیچ دو عددی مقسوم‌علیه مشترک بیش‌تر از یک نداشته باشند، در واقع در بدترین حالت همه اعداد اول را خارج کرده‌ایم، امّا اگر یک عدد دیگر از کیسه خارج کنیم (یعنی ۷ گوی) دست‌کم دو عدد در بین آن‌ها وجود دارد که نسبت به هم اول نیستند. پس برای به دست آوردن حداقل n کافی است همین ۷ عدد اول موجود را به دست آوریم:

اعداد اول : ۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳

بنابراین کمترین مقدار n برابر ۱۳ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه کبوتری) (دشوار)