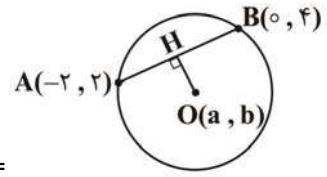


ریاضی ۲

۱- گزینه «۲» - نقطه H وسط پاره خط AB است:

$$H = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$$



$$AH = \sqrt{(-2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}, OH = 3 \xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورس}} OA = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$$

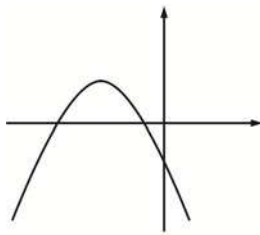
$$OH = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = 9 \Rightarrow a^2 + 2a + b^2 - 6b = 0$$

$$OA = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{11} \Rightarrow a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 = 11 \Rightarrow a^2 + 4a + b^2 - 4b = 3 \quad (2)$$

جای گذاری (1) در (2) $\rightarrow 2a + 2b = 4 \Rightarrow a + b = 2$

(جغری) (فصل اول - درس اول - فاصله نقطه از خط)

۲- گزینه «۳» - برای این که سهمی فقط از ناحیه اول عبور نکند، باید شرایط زیر برقرار باشد:



$$\begin{cases} (1) m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 \\ (2) s = \frac{-2m}{m-2} < 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ (3) p = \frac{m+1}{m-2} \geq 0 \Rightarrow (-\infty, -1] \cup (2, +\infty) \\ (4) \Delta = m^2 - (m-2)(m+1) = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases} \Rightarrow m \in (-2, -1]$$

(جغری) (فصل اول - درس دوم - تابع درجه دوم)

۳- گزینه «۳» - از تغییر متغیر $u = x^2 + 6x - 1$ استفاده می کنیم. داریم:

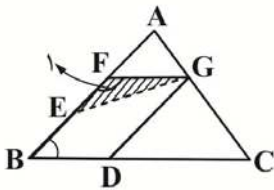
$$\sqrt{u} + \sqrt{u+2} = 2 \Rightarrow \sqrt{u+2} = 2 - \sqrt{u} \xrightarrow{\text{توان ۲}} u+2 = u+4 - 4\sqrt{u} \Rightarrow \sqrt{u} = \frac{1}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{16}$$

با توجه به دامنه معادله، مقدار $u = \frac{1}{16}$ قابل قبول است.

$$\xrightarrow{u = \frac{1}{16}} x^2 + 6x - 1 = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 + 6x - \frac{17}{16} = 0 \xrightarrow{\Delta' = 9 + \frac{17}{4} > 0} \text{دارای دو ریشه متمایز است.}$$

(جغری) (فصل اول - درس سوم - معادلات رادیکالی)

۴- گزینه «۱» -



$$CD = \frac{3}{4} BC \Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$DG \parallel AB \Rightarrow \frac{CG}{AC} = \frac{CD}{BC} = \frac{BF}{AB} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{تفاضیل در صورت}} \frac{AG}{AC} = \frac{1}{4}$$

$$FG \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow AF = \frac{1}{4} AB, FG = \frac{1}{4} BC \Rightarrow \frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(GF)(EF)\sin\hat{F}_1}{\frac{1}{2}(AB)(BC)\sin\hat{B}}$$

با توجه به این که F_1 و B زوایای مکمل هستند، پس $\sin\hat{F}_1 = \sin\hat{B}$. بنابراین:

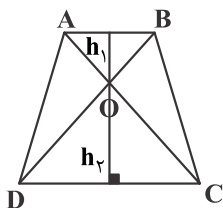
$$\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}BC)(\frac{1}{4}AB)}{\frac{1}{2}(AB)(BC)} = \frac{1}{16}$$

توجه کنید که:

$$EF = \frac{1}{4} BF, BF = \frac{3}{4} AB \Rightarrow EF = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} AB = \frac{3}{16} AB$$

(سراسری ۹۶ - با تغییر) (فصل دوم - درس دوم - قضیه تالس)

۵- گزینه «۴» -



$$\begin{aligned} \Delta_{OAB} \sim \Delta_{OCD} &\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{7} \xrightarrow{h_1+h_2=18} h_1=4, h_2=14 \\ \Rightarrow S_{OAB} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8, S_{OCD} = \frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98, S_{ABCD} = \frac{1}{2} (14+4) \times 18 = 162 \\ \Rightarrow S_{OBC} + S_{OAD} &= 162 - (8+98) = 56 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه مساحت دو مثلث برابرند، پس مساحت هر یک برابر است با ۲۸.

(سراسری ۹۵ - با تغییر) (فصل دوم - درس سوم - تشابه مثلث‌ها)

۶- گزینه «۴» -

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x^2+1} - 3 &\Rightarrow y+3 = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (y+3)^2 - 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{(y+3)^2 - 1} \xrightarrow{x < 0} x = -\sqrt{(y+3)^2 - 1} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= -\sqrt{(x+3)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sqrt{\left(\frac{1}{x}+3\right)^2 - 1} = -\frac{\sqrt{8x^2+6x+1}}{x}$$

(جغرفی) (فصل سوم - درس دوم - تابع وارون)

۷- گزینه «۲» - رأس سهمی داده شده برابر است با $x = \frac{3}{a}$. برای این که سهمی یک‌به‌یک باشد، باید $1 \leq \frac{3}{a}$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{3}{a} \leq 1 &\begin{cases} a < 0 & \text{همواره برقرار است} \\ a > 0 & a > 3 \end{cases} \\ \Rightarrow a &\in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

هم‌چنین برای اینکه برد ضابطه‌های تابع هم‌پوشانی نداشته باشد باید $-1 < \sqrt{-x} - 1 < 0$ و در نتیجه $b < 0$ باشد.

(جغرفی) (فصل سوم - درس دوم - تابع یک‌به‌یک)

۸- گزینه «۱» - با توجه به این که دهانه سهمی رو به پایین است، باید ضریب x^2 منفی باشد، بنابراین گزینه «۲» رد می‌شود. هم‌چنین از آن جا که

نمودار تابع آن مبدأ عبور نکرده است، پس گزینه «۴» نیز رد می‌شود.

در گزینه «۳» داریم:

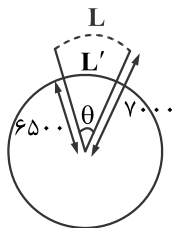
$$f(x) + g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

محور تقارن سهمی $x = 1$ است. بنابراین این گزینه هم رد می‌شود. اما در گزینه «۱»:

$$f(x) + g(x) = -x^2 + x + 2$$

محور تقارن سهمی $x = \frac{1}{2}$ است. (جغرفی) (فصل سوم - درس سوم - اعمال جبری روی توابع)

۹- گزینه «۱» -



$$\theta = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{r}{L'} \Rightarrow \theta = \frac{L'}{r} \Rightarrow L' = r \sin \theta = 6500 \times \frac{3}{7} = 2785 \frac{5}{7}$$

(جغرفی) (فصل چهارم - درس اول - واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

۱۰- گزینه «۱» -

$$\sin(-1183^\circ) = -\sin(13^\circ \times 90^\circ + 13^\circ) = -\cos 13^\circ \Rightarrow \sin 13^\circ \cos 13^\circ = 0.21$$

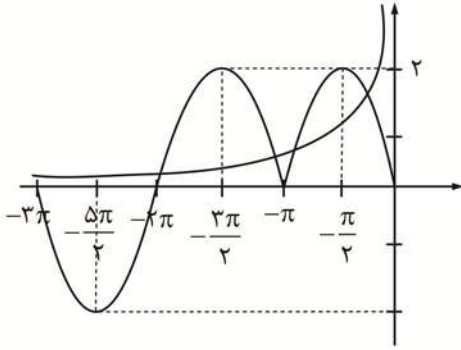
$$\sin(1067^\circ) = \sin(3 \times 360^\circ - 13^\circ) = -\sin 13^\circ$$

$$\cos 13^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 13^\circ}, \sin 13^\circ = x \rightarrow x \sqrt{1 - x^2} = 0.21 \xrightarrow{\text{نوان ۲}} -x^4 + x^2 - \frac{441}{10000} = 0 \xrightarrow{x^2 = t} -t^2 + t - \frac{441}{10000} = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{8236}}{-2} \Rightarrow t = 0.04 \Rightarrow x = \sin 13^\circ = 0.2$$

(جغرفی) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۴» - مطابق شکل نمودار دو تابع در چهار نقطه متقاطع اند.



(جعفری) (فصل چهارم - درس سوم - نمودار توابع مثلثاتی)

۱۲- گزینه «۳» -

$$(\sqrt[4]{2^4 \sqrt{2}})^x = 2^{\frac{x}{4}}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x}{2}} = 2^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{4}} + 2 = 3 \times 2^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow 2^{-\frac{x}{4}} (2^{\frac{x}{4}} + 2 \times 2^{\frac{x}{4}} - 3) = 0$$

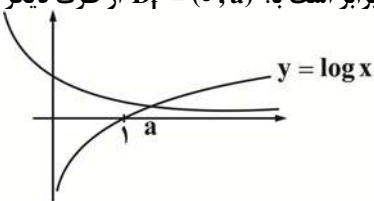
$$\xrightarrow{2^{-\frac{x}{4}} \neq 0} 2^{\frac{x}{4}} + 2 \times 2^{\frac{x}{4}} - 3 = 0 \xrightarrow{t=2^{\frac{x}{4}}} t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ق ق } , t = -3$$

$$\xrightarrow{t=1} 2^{\frac{x}{4}} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \log_2(x^2 + 4) = \log_2 4 = 2 \log_2 2 = 2$$

(جعفری) (فصل پنجم - درس اول و دوم - توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۳- گزینه «۳» - با رسم نمودارهای $\log x$ و $(\frac{1}{3})^x$ متوجه می‌شویم که این دو در نقطه a که عددی بین ۱ و ۲ است. یکدیگر را قطع می‌کنند و

همان‌طور که مشخص است نمودار $(\frac{1}{3})^x$ در بازه $(0, a)$ بالای نمودار $\log x$ قرار دارد، بنابراین دامنه f برابر است با: $D_f = (0, a)$ از طرف دیگر

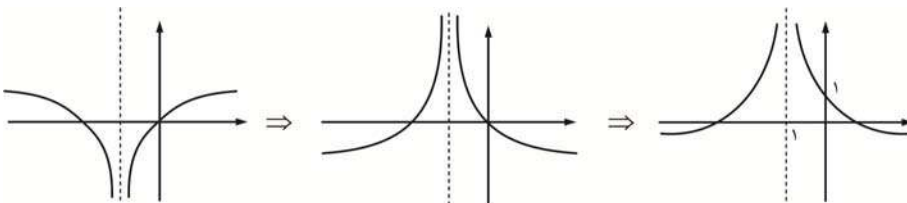


دامنه g برابر است با: $D_g = (-\infty, 1]$

بنابراین: $D_{fg} = D_f \cap D_g = (0, 1]$

(جعفری) (فصل پنجم - درس اول و دوم - توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۴- گزینه «۳» -



$$y = \log |x+1|$$

$$y = -\log |x+1|$$

$$y = 1 - \log |x+1|$$

(جعفری) (فصل پنجم - درس سوم - نمودار توابع لگاریتمی)

۱۵- گزینه «۱» - بررسی «آ»:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^{\sqrt{}}(x+1)}{f(x)+1} = \frac{3^2}{0+1} = 9$$

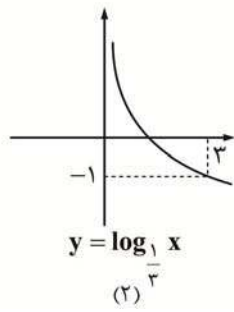
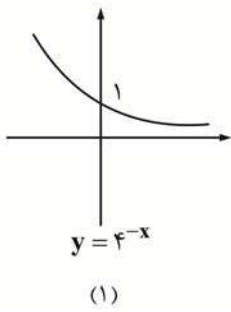
بررسی «ب»:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \text{ وجود ندارد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

بررسی «پ»:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x^{\sqrt{}})) + f^{\sqrt{}}(x) = f(0^+) + f^{\sqrt{}}(0^-) = 1 + (-2)^2 = 5$$

(جعفری) (فصل ششم - درس اول - فرایندهای حدی)

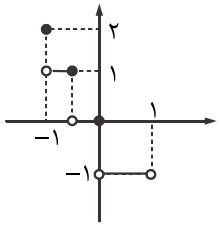


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [4^{-x}] \xrightarrow{\text{شکل ۱}} [1^-] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\log_{\frac{1}{4}} (x+3)] \xrightarrow{\text{شکل ۲}} \log_{\frac{1}{4}} 3^+ = [(-1)^-] = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[4^{-x}] + 1}{[\log_{\frac{1}{4}} (x+3)]} = \frac{0+1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

(جعفری) (فصل ششم - درس دوم - محاسبه حد توابع)

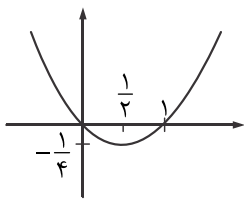


$$y = [f(x)] = [x^2 - x]$$

شکل (۱)

$$f(x) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} [f([f(x)])] \xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} [f([f(x)])] = f(-) = 2$$



$$y = f(x)$$

شکل (۲)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} [f(f(x))] \xrightarrow{\text{شکل ۱}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} [f(x)] = 0$$

(جعفری) (فصل ششم - درس سوم - پیوستگی)

۱۸- گزینه «۳» - اعضای پیشامد A برابر است با:

$$\{(1, 1, ر), (1, 2, ر), (1, 3, ر), (1, 4, ر), (2, 1, ر), (2, 2, ر), (2, 3, ر), (1, 1, پ), (1, 2, پ), (1, 3, پ), (1, 4, پ), (2, 1, پ), (2, 2, پ), (2, 3, پ), (3, 1, ر), (3, 2, ر), (4, 1, ر), (3, 1, پ), (3, 2, پ), (4, 1, پ)\}$$

حال در مجموعه بالا، اعضای که سکه رو آمده است، ۱۰ تا و در بخش اعضای که سکه پشت است، تعداد اعضای که حداقل یکی از اعداد تاس زوج است، ۷ تا می باشد.

$$\text{تعداد کل حالتها برابر است با: } 6 \times 6 \times 2 = 72$$

$$\text{بنابراین } P(A \cap B) = \frac{17}{72} = 0.23 \text{ (جعفری) (فصل هفتم - درس اول - احتمال)}$$

۱۹- گزینه «۲» - نکته: اگر داده‌ها تشکیل یک دنباله حسابی بدهند مقدار میانه و میانگین برابرند و از رابطه زیر به دست می آیند.

$$\text{میانه} = \frac{\text{داده آخر} + \text{داده اول}}{2} = \text{میانگین}$$

طبق نکته: چون داده‌های داده شده تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، داریم:

$$\text{میانه} = \frac{-20 + 56}{2} = 18$$

(جعفری) (فصل هفتم - درس دوم - میانگین و میانه)

$$\bar{x}_2 = \Delta \bar{x}_1 + 4, \sigma_2 = \Delta \sigma_1$$

$$cv_1 = 2 \Rightarrow \sigma_1 = 2\bar{x}_1$$

$$cv_2 = \frac{\sigma_2}{x_2} = \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta x_1 + 4} = \frac{1\Delta \bar{x}_1}{\Delta \bar{x}_1 + 4} = \frac{1\Delta}{7} \Rightarrow \bar{x}_1 = 2 \Rightarrow \bar{x}_2 = 10 + 4 = 14$$

(جعفری) (فصل هفتم - درس دوم - ضریب تغییرات)