حسابان ۱

۱- گزینه «۳» ـ

$$\left.\begin{matrix}\text{مجموع ۴ جمله اول} = ۱۵ \\ \text{مجموع ۵ جمله بعـــدی} = ۳۰\end{matrix}\right\} \text{مجموع ۹ جمله اول} = ۴۵$$

$$\begin{cases}\frac{۴}{۲}(۲a_۱ + ۳d) = ۱۵ \\ \frac{۹}{۲}(۲a_۱ + ۸d) = ۴۵\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۴a_۱ + ۶d = ۱۵ \\ ۹a_۱ + ۳۶d = ۴۵\end{cases} \Rightarrow d = \frac{۱}{۲}, a_۱ = ۳$$

$$a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d = ۳ + ۵ = ۸$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس اول ـ مجموع جملات دنباله حسابی)

۲- گزینه «۴» ـ اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم، بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\alpha = \beta + ۲$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{۴}{۴} = ۱ \Rightarrow \alpha + \beta = ۲\beta + ۲ = ۱ \Rightarrow \beta = \frac{-۱}{۲}, \alpha = \frac{۳}{۲}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{m}{۴} = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow m = -۳$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس دوم ـ معادلات درجه دوم)

۳- گزینه «۳» ـ نکته: $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

$$\frac{|۲x|}{|x+۱|} = \left|\frac{۲x}{x+۱}\right| = ۳ \Rightarrow \begin{cases}\frac{۲x}{x+۱} = ۳ \Rightarrow x = -۳ \\ \frac{۲x}{x+۱} = -۳ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۵}\end{cases}$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس چهارم ـ ویژگی‌های قدرمطلق)

۴- گزینه «۲» ـ وارون‌پذیر بودن یعنی همان یک‌به‌یک بودن تابع:

$$\begin{cases}(۲, ۲a-۱) \\ (۲, ۲-a)\end{cases} \xrightarrow{\text{تـابع بـودن}} ۲a-۱ = ۲-a \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f = \{(۲, ۱)(۳b^۲ - ۴, ۱)(۲, ۱)(b\sqrt{۲}, ۵)\}$$

$$\begin{cases}(۳b^۲ - ۴, ۱) \\ (۲, ۱)\end{cases} \xrightarrow{\text{یک به یـک بـودن}} ۳b^۲ - ۴ = ۲ \Rightarrow b = \pm\sqrt{۲}$$

$b = \sqrt{۲} \Rightarrow f = \{(۲, ۱), (۲, ۱), (۲, ۱), (۲, ۵)\} \Rightarrow$ تـــابع نیســـت

$b = -\sqrt{۲} \Rightarrow f = \{(۲, ۱), (۲, ۱), (۲, ۱), (-۲, ۵)\} \Rightarrow$ تابع و یک بـــه یـــک اســـت

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس اول ـ انواع تابع)

۵- گزینه «۳» ـ ابتدا دامنه $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{f(x)} : ۴ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۴ \quad D_{g(x)} : x^۲ - ۲x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \text{ یا } x > ۲$$

$$D_{fog(x)} = \{x \in D_{g(x)}, g(x) \in D_f\} = \{x > ۲ \text{ یا } x < ۰, \log_۲^{(x^۲-۲x)} \leq ۴\}$$

$$\log_۲(x^۲ - ۲x) \leq ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x \leq ۱۶ \Rightarrow \frac{+۲-\sqrt{۶۸}}{۲} \leq x \leq \frac{+۲+\sqrt{۶۸}}{۲}$$

$$D_{fog(x)} = \{x > ۲ \text{ یا } x < ۰, \frac{+۲-\sqrt{۶۸}}{۲} \leq x \leq \frac{+۲+\sqrt{۶۸}}{۲}\} = [\frac{+۲-\sqrt{۶۸}}{۲}, ۰) \cup (۲, \frac{+۲+\sqrt{۶۸}}{۲}]$$

(سراسری ۹۴ ـ با تغییر) (فصل دوم ـ درس چهارم ـ اعمال روی توابع)

۶- گزینه «۴» ـ ابتدا دو منحنی را در یک دستگاه قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = ۲^x \\ y = ۲^{۲^{x-۱}} + ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲^x = \frac{۱}{۲}۲^x + ۴ \xrightarrow{۲^x = t} t - \frac{۱}{۲}t = ۴ \Rightarrow t = ۸$$

$$۲^x = ۸ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} = (۳ , ۸)$$

$$\text{فاصله از } (۰ , ۴) = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

(سراسری ۹۳ ـ با تغییر) (فصل سوم ـ درس اول ـ تابع نمایی)

۷- گزینه «۱» ـ

$$\cos x = \frac{۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲} = ۲ - ۲\tan^۲ \frac{x}{۲} \Rightarrow \tan^۲ \frac{x}{۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow |(\tan \frac{x}{۲})| = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(رستمی‌کیا) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۸- گزینه «۱» ـ

$$A = \frac{۲\sin(\frac{۸۰ + ۴۰}{۲})\cos(\frac{۸۰ - ۴۰}{۲})}{\cos ۴۰} = ۲\sin ۶۰ = \sqrt{۳}$$

(رستمی‌کیا) (فصل چهارم ـ درس چهارم ـ زوایا مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۹- گزینه «۳» ـ

$$fog(x) = f(x - \frac{۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} = (x - \frac{۱}{x})^۲ + ۲$$

$$f(۵) = ۵^۲ + ۲ = ۲۷$$

(رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس چهارم ـ اعمال روی توابع)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$\begin{matrix} S = a + b = -(\frac{-۱۰}{۱}) = ۱۰ \, (I) \\ P = ab = \frac{۰/۱}{۱} = ۰/۱ \, (II) \end{matrix} \Rightarrow \log a^۲ + \log b^۲ + \log \frac{ab}{۲} = ۲(\log a + \log b) + \frac{۱}{۲}\log ab = ۲\log ab + \frac{۱}{۲}\log ab = \frac{۵}{۲}\log ab = \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۴}$$

(سراسری ۸۹ ـ با تغییر) (فصل اول ـ درس دوم ـ معادله درجه دوم)

۱۱- گزینه «۲» ـ چون حاصل کسر $\frac{۰}{۰}$ است باید رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۱ - ۲\cos x}{\pi - ۳x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\frac{۱}{۲} - \cos x)}{۳(\frac{\pi}{۳} - x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{۲(\cos \frac{\pi}{۳} - \cos x)}{۳(\frac{\pi}{۳} - x)} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{-۲(۲\sin(\frac{\frac{\pi}{۳} + x}{۲})\sin(\frac{\frac{\pi}{۳} - x}{۲}))}{۳(\frac{\pi}{۳} - x)}$$

$$\xrightarrow[\text{را در } \frac{۱}{۲} \text{ ضرب می کنیم}]{\text{صورت و مخرج}} \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin \frac{\frac{\pi}{۳} - x}{۲}}{\frac{\frac{\pi}{۳} - x}{۲}} \times \lim \frac{-۲\sin(\frac{\frac{\pi}{۳} + x}{۲})}{۳} = ۱ \times (\frac{-\sqrt{۳}}{۳}) = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

(رستمی‌کیا) (فصل پنجم ـ درس چهارم ـ محاسبه حد)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$\left.\begin{matrix} f(۱) = ۱ \\ \lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (a\sin(\frac{\pi}{۲}x) + b) = a + b \\ \lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (a[۴x] - b) = ۳a - b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b = ۳a - b = ۱ \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \frac{۱}{۲} \\ b = \frac{۱}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b = ۱$$

(رستمی‌کیا) (فصل پنجم ـ درس پنجم ـ پیوستگی)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\text{چون } f \text{ در } x=0 \text{ پیوسته است} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=2$$

(رستمی‌کیا) (فصل پنجم ـ درس پنجم ـ پیوستگی)

۱۴- گزینه «۱» ـ وقتی $x\to(\frac{1}{6})^+$ ، $\cos(\pi x)$ با مقادیر کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ میل می‌کند، پس:

$$x\to(\tfrac{1}{6})^+ \Rightarrow \cos(\pi x) \Rightarrow (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^- \Rightarrow 2\cos^2(\pi x) \Rightarrow 2^- \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[2\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\lim_{x\to\frac{1^+}{6}}\frac{1-6x}{ax+b}=\frac{1}{3}$$

از آن‌جا که صورت کسر به صفر میل می‌کند، مخرج کسر نیز باید به صفر میل کند تا حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ گردد در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر خواهد شد:

$$\frac{a}{6}+b=0 \Rightarrow a=-6b \Rightarrow \lim_{x\to\frac{1^+}{6}}\frac{1-6x}{ax+b}=\lim_{x\to\frac{1^+}{6}}\frac{1-6x}{-6bx+b}=\lim_{x\to\frac{1^+}{6}}\frac{(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{1}{b}=\frac{1}{3}\Rightarrow b=3 \text{ پس } a=-18\Rightarrow a+b=-15$$

(سراسری ۹۲ ـ با تغییر) (فصل پنجم ـ درس چهارم ـ محاسبه حد)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$D_{3f}=D_f=\{4,2,3\}, D_g=\{2,3\}$$
$$D_{3f-g}=D_{3f}\cap D_g=\{2,3\}, g(x)\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \Rightarrow \frac{D_{3f-g}}{2g}=D_{3f-g}\cap D_{2g}-\{x\mid g(x)=0\}=\{2,3\}-\{3\}=\{2\}$$

تنها یک عضو دارد. (رستمی‌کیا) (فصل دوم ـ درس چهارم ـ اعمال روی توابع)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{6}{x}=2+\frac{x}{x+1} \Rightarrow 6(x+1)=2x(x+1)+x^2 \Rightarrow 6x+6=2x^2+2x+x^2 \Rightarrow 3x^2-4x-6=0 \Rightarrow \begin{matrix}x_1=\frac{2+\sqrt{22}}{3}\\ x_2=\frac{2-\sqrt{22}}{3}\end{matrix} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{4}{3}$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$\frac{a_{10}}{a_3}=q^7=2^7 \Rightarrow q=2$$

$$a_3=16 \Rightarrow a_1q^2=4\times a_1=16 \Rightarrow a_1=4$$

$$S_{11}=\frac{4(1-2^{11})}{1-2}=4\times 2047=8188$$

(رستمی‌کیا) (فصل اول ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$\log(a^2b^2)ac=\log(ab)^2+\log ac=2\log\ +\log ac=2k_1+k_3$$

(رستمی‌کیا) (فصل سوم ـ درس سوم ـ لگاریتم و خواص آن)

۱۹- گزینه «۴» ـ

$$\frac{\tan x\cot 2x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\times\cot 2x=\frac{1}{2}\tan 2x\cot 2x=\frac{1}{2}$$

(رستمی‌کیا) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

۲۰- گزینه «۴» ـ ضابطه معکوس f را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow y^2-y^2x^2=x^2 \Rightarrow (1+y^2)x^2=y^2 \Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \xrightarrow{x=\tan x} y^{-1}(x)=\frac{\tan}{\sqrt{1+\tan x^2}} \Rightarrow y^{-1}=\tan x\times\cos x=\sin x$$

(سراسری ۹۰ ـ با تغییر) (فصل دوم ـ درس سوم ـ وارون تابع)