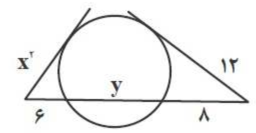
هندسه ۲

۱- گزینه «۳» ـ باتوجه به روابط طولی در دایره داریم:

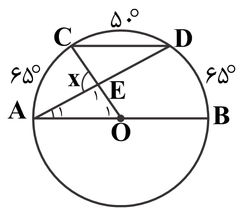


$$۱۲ \times ۱۲ = ۸\,(۸ + y) \;\Rightarrow\; y = ۱۰$$

$$x^۴ = ۶\,(۶ + y) \;\Rightarrow\; x^۴ = \underbrace{۶\,(۱۶)}_{۹۶} \;\Rightarrow\; x^۲ = \sqrt{۹۶}$$

(گروه مؤلفان علـوی) (فصل اول ـ دایره ـ روابط طولی در دایره) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{CD} = ۵۰° \\ AB \parallel CD \;\Rightarrow\; \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow\; \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = ۶۵°$$

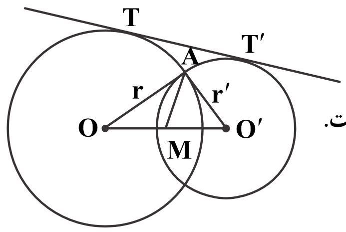
محاطی : $\hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = ۳۲/۵°$

مرکزی $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AC} = ۶۵°$

$$O\overset{\Delta}{A}E : \hat{E}_۱ + \hat{O}_۱ + \hat{A}_۱ = ۱۸۰° \;\Rightarrow\; \hat{E}_۱ = ۸۲/۵° \;\Rightarrow\; x = ۱۸۰° - \hat{E}_۱ = ۹۷/۵°$$

(فیروزی) (فصل اول ـ دایره ـ زاویه) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ـ می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است و برعکس، لذا با توجه به این‌که $AM = \frac{۱}{۲}OO'$ ، می‌توان گفت که مثلث AOO' قائم‌الزاویه است، بنابراین طبق رابطه فیثاغورث خواهیم داشت:



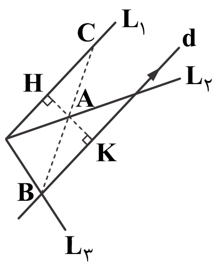
$$A\overset{\Delta}{O}O' : AO^۲ + AO'^۲ = OO'^۲ \;\Rightarrow\; ۴^۲ + ۳^۲ = OO'^۲ \;\Rightarrow\; OO' = ۵$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره با خط‌المرکزین d و شعاع‌های r و r' برابر با $\sqrt{d^۲ - (r - r')^۲}$ است. بنابراین داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (r - r')^۲} = \sqrt{۲۵ - (۴ - ۳)^۲} = \sqrt{۲۴} \;\Rightarrow\; TT' = ۲\sqrt{۶}$$

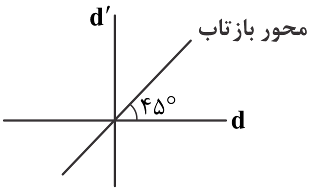
(سراسری داخل کشور ریاضی ـ ۹۰) (فصل دوم ـ دایره ـ ترسیم‌های هندسی) (دشوار)

۴- گزینه «۱» ـ AH عمود بر $L_۱$ و $AH = AK$ است. d با $L_۱$ موازی است (d انتقال یافته $L_۱$ با بردار $\overrightarrow{HK}$ است) و $L_۳$ را در B قطع مـی‌کنـد. AB، $L_۱$ را در C قطع می‌کند، از همنهشتی $A\overset{\Delta}{H}C$ و $A\overset{\Delta}{B}K$ می‌توان نتیجه گرفت که $AB = AC$. چون فاصله A تا $L_۱$ ثابت است، پس تنها پاره‌خط BC جواب مسأله است.



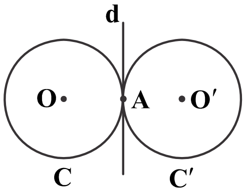
(کتاب همراه علوی) (فصل دوم ـ تبدیل‌های هندسی و کاربردها) (دشوار)

۵- گزینه «۳» ـ چون شیب خط d برابر با $\frac{۱}{۲}$ و شیب خط d' برابر با -۲ است، پس دو خط بر هم عمودند. محور بازتاب نیمساز زاویـه بـین خـط و تصویرش تحت بازتاب است، پس زاویه محور بازتاب هر یک از این خط‌ها برابر $۴۵°$ است.



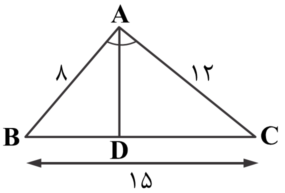
(فیروزی) (فصل سوم ـ بازتاب) (آسان)

۶- گزینه «۴» ـ چون $OO' = ۲R = ۱۲$، پس دو دایره مماس خارج هستند. بازتاب دایره C نسبت به خط d (مماس مشترک خارجی ۲ دایره) دایره C' است. دایره C' دوران یافته دایره C به مرکز A و زاویه دوران ۱۸۰° است. مجانس دایره C در تجانس به مرکز A و نسبت $k = -۱$ دایره C' است.



(فیروزی) (فصل سوم ـ تبدیل‌های هندسی) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ بزرگ‌ترین زاویه، روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع قرار دارد و نیمساز آن دو قطعه روی بزرگ‌ترین ضلع پدید می‌آورد که کوچک‌ترین قطعه، مجاور کوچک‌ترین ضلع قرار دارد، بنابراین: $BD < DC$.

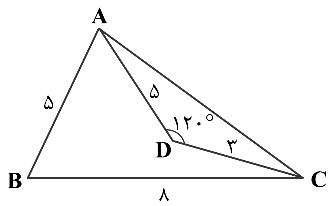


$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{۱۵ - BD} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow ۱۲BD = ۱۲۰ - ۸BD$$

$$۲۰BD = ۱۲۰ \Rightarrow BD = \frac{۱۲۰}{۲۰} = ۶$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل سوم ـ درس سوم) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ



$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ - ۲AD \times DC \times \cos\widehat{D} \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ + ۹ - ۲(۵)(۳)\cos ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۴۹ \Rightarrow AC = ۷$$

مساحت مثلث ABC با دستور هرون برابر است با:

$$P_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۵ + ۸ + ۷}{۲} = ۱۰ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \sqrt{۱۰ \times (۱۰ - ۵)(۱۰ - ۸)(۱۰ - ۷)} = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$P_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{ADC}} = ۱۰\sqrt{۳} - \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۰\sqrt{۳} - ۱۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$$

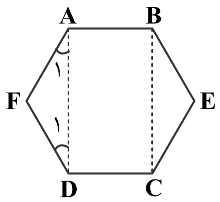
(کتاب همراه علوی) (فصل سوم ـ درس چهارم) (دشوار)

۹- گزینه «۲» ـ

$$\frac{a}{\sin A} = \underbrace{\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}_{(۱)} \xrightarrow{(۱)} \frac{۴\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۴}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۰۵^\circ \\ \hat{C} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ روابط طولی ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ـ می‌دانیم اندازه هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر با ۱۲۰° است. با توجه به این‌که مثلث AFD متساوی‌الساقین است. داریم:



$$\overset{\Delta}{AFD}: \widehat{A}_1 + \widehat{F} + \widehat{D}_1 = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1} ۲\widehat{D}_1 + ۱۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 = ۳۰^\circ$$

$$F\widehat{D}C = \widehat{D}_1 + A\widehat{D}C \Rightarrow ۱۲۰^\circ = ۳۰^\circ + A\widehat{D}C \Rightarrow A\widehat{D}C = ۹۰^\circ$$

با توجه به این‌که در چهارضلعی ABCD ، اضلاع روبه‌رو موازی بوده و همه زوایای آن ۹۰° می‌باشد. این چهارضلعی مستطیل است، حال کافی است طول این مستطیل را محاسبه کنیم:

$$\overset{\Delta}{AFD}: AD^۲ = AF^۲ + DF^۲ - ۲AF \times DF \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow AD^۲ = ۲^۲ + ۲^۲ - ۲ \times ۲ \times ۲ \times (-\frac{۱}{۲}) = ۱۲ \Rightarrow AD = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{مستطیل } ABCD = AD \cdot CD = ۲\sqrt{۳} \times ۲ = ۴\sqrt{۳}$$

(گروه مؤلفان علـوی) (فصل سوم ـ روابط طولی ـ قضیه کسینوس‌ها) (متوسط)