

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» -

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n; a_1 = 2 = 2^1 \\ n=1; a_2 &= 2a_1 = 2 \times 2 = 4 = 2^2 \\ n=2; a_3 &= 2a_2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3 \\ n=3; a_4 &= 2a_3 = 2 \times 8 = 16 = 2^4 \\ n=4; a_5 &= 2a_4 = 2 \times 16 = 32 = 2^5 \\ &\vdots \\ a_n &= 2^n \end{aligned}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس اول - مدل سازی و دنباله)

۲- گزینه «۳» - مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ به دست می آید:

$$\begin{cases} S_n = 260 \\ n = 20 \\ d = 2 \\ a_1 = ? \end{cases} \Rightarrow 260 = \frac{20}{2}(2a_1 + 19(2)) \Rightarrow 260 = 10(2a_1 + 38) \Rightarrow 2a_1 + 38 = 26 \Rightarrow 2a_1 = 26 - 38 = -12 \Rightarrow a_1 = \frac{-12}{2} = -6$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - دنباله های حسابی)

۳- گزینه «۲» - دنباله داده شده یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ۳ می باشد:

$$-12, -9, -6, \dots \Rightarrow -9 - (-12) = -9 + 12 = 3 \quad \text{یا} \quad -6 - (-9) = 3$$

جمله n ام یک دنباله حسابی از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می آید:

$$a_1 = -12$$

$$a_{19} = -12 + (19-1)(3) = -12 + 18 \times 3 = -12 + 54 \Rightarrow a_{19} = 42$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - دنباله های حسابی)

۴- گزینه «۳» - جمله n ام دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید که r نسبت مشترک و a_1 جمله اول است.

$$a_5 = 10 \Rightarrow a_5 = a_1 r^4 = 10 \quad (1)$$

$$a_7 = 40 \Rightarrow a_7 = a_1 r^6 = 40 \quad (2)$$

رابطه (۱) را بر (۲) تقسیم می کنیم:

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r^6} = \frac{10}{40} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

چون دنباله افزایشی است فقط $r = 2$ قابل قبول است. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - دنباله هندسی)

۵- گزینه «۱» - از رابطه بازگشتی متوجه می شویم که این دنباله یک دنباله هندسی با نسبت مشترک ۳- است. مجموع n جمله اول یک دنباله

هندسی از رابطه $S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید که a جمله اول و r نسبت مشترک می باشد.

$$\begin{cases} r = -3 \\ a = 2 \\ S_n = -40 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow -40 = 2 \times \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} \Rightarrow -40 = \cancel{2} \times \frac{1 - (-3)^n}{\cancel{2}} \Rightarrow -40 = \frac{1 - (-3)^n}{2} \Rightarrow 1 - (-3)^n = -80 \Rightarrow (-3)^n = 81 \Rightarrow n = 4$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - دنباله هندسی)

۶- گزینه «۲» -

$$(9)^{\frac{-1}{2}} \times (81)^{\frac{-1}{4}} = (3^2)^{\frac{-1}{2}} \times (3^4)^{\frac{-1}{4}} = 3^{-1} \times 3^{-1} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

از روابط مقابل استفاده کرده ایم:

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه n ام و توان گویا)

۷- گزینه «۴» -

$$3^{-1} \times \left(\frac{64}{9}\right)^x \times \left(\frac{49}{36}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{48} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{2^6}{3^2}\right)^x \times \left(\frac{7^2}{6^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{6 \times 8} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{48}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{8} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۸- گزینه «۳» -

$$-243 = -3 \times 81 = -3 \times 3^4 = (-3)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۹- گزینه «۱» -

$$A = [5^{-1} \times 3^{\frac{1}{2}} \times (75)^{\frac{-1}{2}}] - [5^{\frac{-1}{2}} \times (40)^{\frac{1}{2}}] = [5^{-1} \times 3^{\frac{1}{2}} \times (25 \times 3)^{\frac{-1}{2}}] - [5^{\frac{-1}{2}} \times (8 \times 5)^{\frac{1}{2}}] =$$

$$[5^{-1} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{-1}{2}} \times 3^{\frac{-1}{2}}] - [5^{\frac{-1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{25} - 2 = \frac{1-50}{25} = -\frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{49}{25} \Rightarrow -A = \frac{49}{25} \quad (-A)^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۱۰- گزینه «۳» - با استفاده از رابطه $(a^m)^n = a^{mn}$ داریم:

$$\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}} = \frac{3^{\frac{5}{4}}}{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{5}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = 3$$

که از رابطه $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ استفاده کرده‌ایم. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۱۱- گزینه «۱» - درباره ریشه nام عددی مانند a داریم:

$$a \geq 0 \begin{cases} \text{ریشه } n \text{ ام } a = \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} & \text{زوج } n \\ \text{ریشه } n \text{ ام } a = \sqrt[n]{a} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$a < 0 \begin{cases} \text{ریشه ندارد.} & \text{زوج } n \\ \text{ریشه } n \text{ ام } a = \sqrt[n]{a} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$16 \text{ منفی ریشه چهارم } = -\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -2 \Rightarrow \frac{-\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{-125}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$-125 \text{ ریشه سوم } = \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۱۲- گزینه «۲» - با استفاده از رابطه $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ داریم:

$$\frac{\sqrt[3]{6^4} \times \sqrt[3]{36}}{\sqrt{294}} = \frac{6^{\frac{4}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{7 \times 7 \times 6}} = \frac{6^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} \times 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{7 \times 7 \times 6}} = \frac{6^2 \times 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{7 \times 7 \times 6}} = \frac{6^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{7 \times 7 \times 6}} = \frac{6^{\frac{5}{2}}}{7 \times \sqrt{6}} = \frac{6^{\frac{5}{2}}}{7 \times 6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^2}{7} = \frac{36}{7} = \sqrt{216}$$

که از رابطه $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ نیز استفاده کرده‌ایم. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - ریشه nام و توان گویا)

۱۳- گزینه «۴» - در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد وقتی x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر با کاهش

مقدار x مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. (اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۴- گزینه «۱» - برای یافتن نقطه برخورد منحنی با محور yها باید به جای x، صفر قرار دهیم:

$$y = 5^x \xrightarrow{x=0} y = 5^0 = 1 \Rightarrow \text{نقطه } (0, 1)$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۵- گزینه «۲» - در تابع نمایی $y = a^x$ داریم:

$$a > 0, a \neq 1$$

بنابراین فقط گزینه «۲» قابل قبول است:

$$m = 2 \Rightarrow y = 1^x \quad \times$$

$$m = 5 \Rightarrow y = 4^x \quad \checkmark$$

$$m = 1 \Rightarrow y = 0^x \quad \times$$

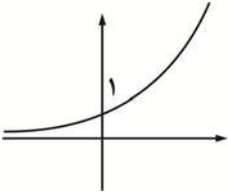
$$m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{4}\right)^x \quad \times$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۶- گزینه «۴» - نمودار تابع نمایی محور x ها را قطع نمی‌کند. بنابراین هیچ تابع نمایی دارای برد صفر نخواهد بود.

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}^+ : x > 0$$

چون $\sqrt{3}$ عددی بزرگتر از ۱ هست در نتیجه نمودار حالت افزایشی دارد و به شکل زیر است:



(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۷- گزینه «۱» - چون تابع f نمایی است پس ضریب x باید صفر باشد:

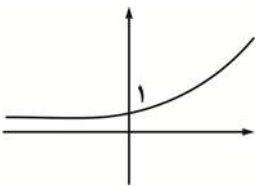
$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$g(x) = (3 - a)^x \Rightarrow g(x) = (3 - 1)^x = 2^x \Rightarrow g(3) = 2^3 = 8$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۸- گزینه «۳» - در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد نمودار حالت افزایشی دارد به این صورت که با زیاد شدن x ها، y ها نیز زیاد می‌شود در

نتیجه شکل نمودار به صورت زیر است:



فقط گزینه «۳»، $a > 1$ است.

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۱۹- گزینه «۲» - معادله کلی رشد نمایی به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد و t بیانگر زمان است.

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 6 \text{ میلیون نفر} \\ r = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\ t = 2 \text{ سال} \\ f(t) = ? \end{array} \right. \Rightarrow f(t) = 6\left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 = 6\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 8 \frac{6}{25} = 8 \frac{6}{25} \text{ میلیون نفر} \quad f(t) \approx 9 \text{ میلیون نفر}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)

۲۰- گزینه «۴» - معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است. که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r میزان نزول و t بیانگر زمان است.

$$f(t) = 80\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 = 80\left(1 - \frac{1}{20}\right)^2 = 80\left(\frac{19}{20}\right)^2 = \frac{80}{20} \times (19)^2 = \frac{1}{100} \times 68480 = 68 \frac{8}{25} \Rightarrow f(t) = 68 \text{ میلیون نفر}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس سوم - تابع نمایی)