ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» ـ جمله nام یک دنباله حسابی از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید که d اختلاف مشترک و a_1 جمله اول است:

$$a_6 = -5 \, , \, d = -\frac{2}{5}$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)(-\frac{2}{5}) \Rightarrow -5 = a_1 + 5(-\frac{2}{5}) \Rightarrow a_1 = -3$$

$$a_{16} = -3 + (16-1)(-\frac{2}{5}) = -3 + 15(-\frac{2}{5}) = -9 \Rightarrow a_{16} = -9$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ دنباله‌های حسابی)

۲- گزینه «۴» ـ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad d = \frac{1}{3} \qquad s = -95 \qquad n = 10$$

a_1 را از رابطه بالا به‌دست می‌آوریم:

$$s_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + (10-1)(\frac{1}{3})] \Rightarrow -95 = 5[2a_1 + 9(\frac{1}{3})] \Rightarrow -95 = 5[2a_1 + 3] \Rightarrow 2a_1 + 3 = -19 \Rightarrow 2a_1 = -22 \Rightarrow a_1 = -11$$

جمله چهارم از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به‌دست می‌آید:

$$a_4 = -11 + (3)(\frac{1}{3}) = -10$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموع n جمله اول دنباله‌های حسابی)

۳- گزینه «۱» ـ طبق روی سؤال داریم:

$$a_3 \times a_5 = 36$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می‌باشد. جملات سوم و چهارم و پنجم را به‌دست می‌آوریم:

$$a_3 = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$a_3 \times a_5 = 36 \Rightarrow a_1 r^2 \times a_1 r^4 = 36 \Rightarrow a_1^2 r^6 = 36$$

$$\Rightarrow (a_1 r^3)^2 = 36 \Rightarrow (a_4)^2 = 36 \Rightarrow a_4 = 6$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۴- گزینه «۲» ـ جمله عمومی یک دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می‌باشد:

$$\begin{cases} a_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ a_7 = 2 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a_1 r^3 = \frac{1}{4} \\ a_1 r^6 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر هم}} r^{-3} = \frac{1}{8} \Rightarrow r = 2$$

$r = 2$ را در یکی از رابطه‌ها قرار می‌دهیم:

$$a_1 r^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_1(8) = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{32}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $s_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید:

$$s_n = \frac{31}{32} \Rightarrow \frac{31}{32} = \frac{1}{32} \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow \frac{31}{32} = \frac{-1}{32}(1-2^n) \Rightarrow 1-2^n = -31 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۵- گزینه «۱» ـ ریشه‌های چهارم ۶۴ دو عدد $\sqrt[4]{64}$, $-\sqrt[4]{64}$ هستند:

$$\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{8\times 8}=\sqrt[4]{2^3\times 2^3}=\sqrt[4]{2^6}=2^{\frac{6}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$$

$$-\sqrt[4]{64}=-2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt[4]{64}\times(-\sqrt[4]{64})=2^{\frac{3}{2}}\times(-2^{\frac{3}{2}})=-2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=-2^3=-8$$

نکته: ریشه‌های n ام عددی مانند a به‌صورت زیر است:

$$a\geq 0\begin{cases} n \text{ زوج} \Rightarrow a \text{ ام } n \text{ ریشه} = \sqrt[n]{a}\ ,\ -\sqrt[n]{a} \\ n \text{ فرد} \Rightarrow a \text{ ام } n \text{ ریشه} = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

$$a<0\begin{cases} n \text{ زوج} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ n \text{ فرد} \Rightarrow a \text{ ام } n \text{ ریشه} = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n اُم و توان گویا)

۶- گزینه «۴» ـ طبق روی سؤال ریشه سوم عدد a برابر -5 است:

$$\sqrt[3]{a}=-5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۳}} (\sqrt[3]{a})^3=(-5)^3 \Rightarrow a=-125=(-5)^3$$

ریشه نهم عدد عبارت است از:

$$\sqrt[9]{-125}=\sqrt[9]{(-5)^3}=(-5)^{\frac{3}{9}}=(-5)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\sqrt[3]{-5}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۷- گزینه «۳» ـ

$$A=2\sqrt[4]{3}\times 5\sqrt[4]{27}=2\times 5\times\sqrt[4]{3\times 27}=2\times 5\times\sqrt[4]{81}=2\times 5\times\sqrt[4]{3^4}=2\times 5\times 3=30$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n اُم و توان گویا)

۸- گزینه «۲» ـ توان را به‌صورت و مخرج اثر می‌دهیم:

$$\frac{(2^{\frac{1}{3}})^6}{(4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(2^{\frac{1}{3}})^6}{(2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^{\frac{1}{3}\times 6}}{2^{2\times\frac{3}{2}}}=\frac{2^2}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۹- گزینه «۴» ـ

$$A=4(45)^{\frac{1}{3}}+(225)^{\frac{1}{2}}-3(5)^{\frac{1}{3}}(9)^{\frac{1}{3}}-15=4(9\times 5)^{\frac{1}{3}}+(15\times 15)^{\frac{1}{2}}-3(5)^{\frac{1}{3}}(9)^{\frac{1}{3}}-15=$$

$$4(9)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{1}{3}}+\underbrace{(15)^{\frac{1}{2}}(15)^{\frac{1}{2}}}_{15}-3(5)^{\frac{1}{3}}(9)^{\frac{1}{3}}-15=4(9)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{1}{3}}-3(9)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{1}{3}}=(9)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$A^3=((9)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{1}{3}})^3=(9^{\frac{1}{3}})^3(5^{\frac{1}{3}})^3=9\times 5=45$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$(\frac{64}{27})^{\frac{-2}{3}}=(\frac{4^3}{3^3})^{\frac{-2}{3}}=(\frac{4}{3})^{3\times(-\frac{2}{3})}$$

از تساوی $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ استفاده می‌کنیم:

$$(\frac{4}{3})^{-2}=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۱۱- گزینه «۲» ـ چون در مخرج کسر، پایه‌ها برابرند، پس توان‌ها را جمع می‌کنیم:

$$\frac{۱۲^{m}\times۱۲^{۸}}{۴\times۴^{۶}\times\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱۲^{m}\times۱۲^{۸}}{۴\times۴^{۶}\times۴^{-۲}}=\frac{۱۲^{m}\times۱۲^{۸}}{۴^{(۱+۶-۲)}}=\frac{۱۲^{m}\times۱۲^{۸}}{۴^{۵}}$$

$$\frac{۱۲^{m}\times۱۲^{۸}}{۴^{۵}}=۳^{۵}\ \Rightarrow\ ۱۲^{m}\times۱۲^{۸}=۴^{۵}\times۳^{۵}\ \Rightarrow\ ۱۲^{m}\times۱۲^{۸}=۱۲^{۵}\ \Rightarrow\ ۱۲^{m}=\frac{۱۲^{۵}}{۱۲^{۸}}=۱۲^{(۵-۸)}=۱۲^{-۳}$$

$$m=-۳$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۱۲- گزینه «۳» ـ عبارت‌ها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^{۳}}=(۴^{۳})^{\frac{۱}{۳}}=۴$$

$$\frac{۱}{\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}+۲\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{(۱+۳-\cancel{۲\sqrt{۳}})+\cancel{۲\sqrt{۳}}}}=\frac{۱}{۲}$$

در ساده کردن این عبارت از اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای استفاده کرده‌ایم.

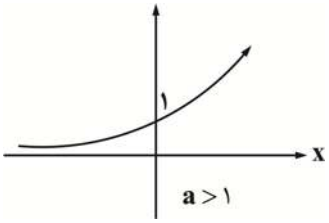
$$(۰/۱۲۵)^{\frac{۱}{۳}}=(\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰})^{\frac{۱}{۳}}=(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}}=(\frac{۱}{۲^{۳}})^{\frac{۱}{۳}}=(۲^{-۳})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه ساده شده عبارت خواسته شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

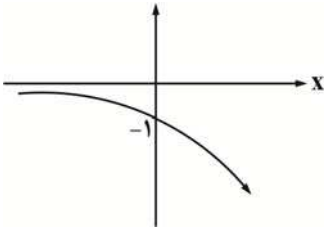
$$\sqrt[۳]{۶۴}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}+۲\sqrt{۳}}}-(۰/۱۲۵)^{\frac{۱}{۳}}=۴+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ریشه n ام و توان گویا)

۱۳- گزینه «۲» ـ نمودار یک تابع نمایی با ضابطه $y=a^{x}$ اگر $a>۱$ باشد به‌صورت زیر است:

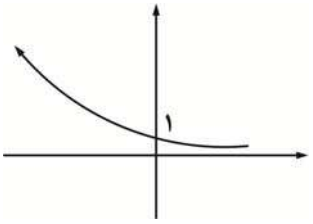


سؤال نمودار تابع $y=-(۳)^{x}$ را خواسته که نمودار تابع $y=۳^{x}$ به‌صورت بالا خواهد بود ولی چون یک علامت منفی دارد نمودار نسبت به محور xها قرینه خواهد شد در نتیجه نمودار به‌صورت زیر در می‌آید که از نواحی سوم و چهارم دستگاه مختصات می‌گذرد.



(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۴- گزینه «۴» ـ نمودار یک تابع نمایی دارای ضابطه $y=a^{x}$ اگر $۰<a<۱$ باشد به‌صورت زیر است:



با توجه به نمودار داده شده در روی سؤال متوجه می‌شویم که نمودار داده شده نمودار یک تابع نمایی $y=a^{x}$ با $۰<a<۱$ است. در نتیجه داریم:

$$y=(n+۲)^{x}\ \Rightarrow\ ۰<n+۲<۱\ \Rightarrow\ -۲<n<-۱$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۵- گزینه «۳» ـ به‌طور کلی نمودار تابع نمایی $y = a^x$ صرف‌نظر از مقدار a همواره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. پس نقطه مـورد نظر $(۱ , ۰)$ می‌باشد بنابراین گزینه «۳» صحیح است. (اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۶- گزینه «۱» ـ نمودار تابع از نقطه $(۲ , -۱)$ عبور می‌کند پس این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$f(x) = -m(\frac{۱}{۲})^x \xrightarrow{(-۱,۲)} ۲ = -m(\frac{۱}{۲})^{-۱} \Rightarrow ۲ = -m(۲) \Rightarrow \boxed{m = -۱} \Rightarrow f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$$

$$f(۳) = (\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۸}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۷- گزینه «۲» ـ در توابع نمایی $y = a^x$، اگر $a > ۱$ باشد نمودار حالت افزایشی دارد و اگر $۰ < a < ۱$ باشد نمودار حالت کاهشی دارد. بنابراین A و B مربوط به توابع ۳^x و ۲^x و C و D مربوط به توابع $(\frac{۱}{۳})^x$ و $(\frac{۱}{۲})^x$ می‌باشند. اما در هر دو حالت $a > ۱$ و $۰ < a < ۱$ هرچه مقدار a بیشتر شـود به‌ازای xهای مثبت، نمودار بالاتر می‌رود و به‌ازای xهای منفی نمودار پایین‌تر می‌رود. بنابراین با توجه به توضیحات بالا نتیجه می‌گیریم که:

$A : ۳^x$

$B : ۲^x$

$C : (\frac{۱}{۳})^x$

$D : (\frac{۱}{۲})^x$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$D_f = \mathbb{R} , R_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

نمودار تابع نمایی محور xها را قطع نمی‌کند بنابراین هیچ تابع نمایی دارای برد صفر نخواهد بود.

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ تابع نمایی)

۱۹- گزینه «۳» ـ معادله کلی رشد نمایی به‌صورت $f(t) = c(۱+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیـه، r بیـانگر میـزان رشد (تغییرات برحسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

$$\begin{cases} c = ۸ \text{ میلیـــون نفـــر} \\ r = \frac{۱۲/۵}{۱۰۰} = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} \\ t = ۱ \text{ سال} \\ f(t) = ? \end{cases} \Rightarrow f(t) = ۸(۱+\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰})^۱ = ۸(۱/۱۲۵) = ۹$$

$f(t) = ۹$ میلیـــون نفـــر

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ رشد نمایی)

۲۰- گزینه «۲» ـ اگر با گذشت زمان، مقدار یک ماده یا هر چیز دیگر کاهش یابد با مسئله زوال مواجه‌ایم. تابع زوال نمایی به‌صورت مقابـل تعریـف می‌شود:

$$f(t) = c(۱-r)^t$$

مقدار نهایی — مقدار اولیه — نرخ زوال — زمان

طبق روی سؤال $f(t) = \frac{۱}{۲۷}c$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲۷}c = c(۱-r)^۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲۷} = (۱-r)^۳ \Rightarrow ۱-r = \frac{۱}{۳} \Rightarrow r = ۱-\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow r = ۶۶٪$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم ـ زوال نمایی)