ریاضیات

۱- گزینه «۲» ـ هر چهار تابع داده شده در $x=۲$ پیوسته‌اند. حال مشتق آن‌ها را در $x=۲$ حساب می‌کنیم.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|(x-۲)^۳|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x-۲)|x-۲|=۰$$

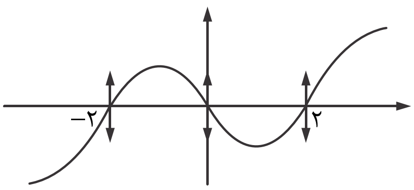
$$g'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}=+\infty$$

$$h'(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۲\\ ۴ & x<۲\end{cases}\Rightarrow h'_+(۲)=h'_-(۲)=۴$$

$$m'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{m(x)-m(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)^۲[x]}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x-۲)[x]=۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری)

۲- گزینه «۳» ـ تابع را به‌صورت $y=\sqrt[۳]{x(x-۲)(x+۲)}$ تبدیل می‌کنیم. این تابع در سه نقطه به طول‌های ۲ و ۲− و صفر مماس عمودی (از نوع عطف قائم) دارد. یک نمودار تقریبی از این تابع به‌صورت زیر است.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری)

۳- گزینه «۱» ـ خواسته سؤال $f'(۴)$ است.

$$f(x)=\underbrace{(x^۲-۴x)}_{g(x)}\underbrace{\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۸}}}_{h(x)}$$

چون $g(۴)=۰$ است، پس $f'(۴)=g'(۴)h(۴)$ خواهد بود.

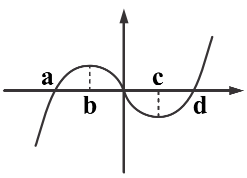
$$g'(x)=۲x-۴\ \Rightarrow\ g'(۴)=۴\,,\,h(۴)=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{۲}\,,\,f'(۴)=g'(۴)h(۴)=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تابع مشتق)

۴- گزینه «۱» ـ آهنگ متوسط در هر تابع درجه دوم در بازه $[a\,,\,b]$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در وسط بازه یعنی $\frac{a+b}{۲}$ می‌باشد. در این سؤال $۱+m$ دقیقاً وسط بازه $[۲\,,\,۲m]$ است، پس آهنگ لحظه‌ای و متوسط با هم برابرند و در نتیجه اختلاف صفر است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ تغییر)

۵- گزینه «۳» ـ تابع f در فاصله $(-\infty\,,\,b)$ صعودی اکید، در فاصله $(b\,,\,c)$ نزولی اکید و در فاصله $(c\,,\,+\infty)$ صعودی اکید است، پس تابع f' در فاصله‌های فوق به‌ترتیب مثبت، منفی و مثبت است. ضمناً $f'(b)=f'(c)=۰$ می‌باشد. در مبدأ مختصات هم شیب مماس بر تابع منفی خواهد بود.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نمودار مشتق و یکنوایی)

۶- گزینه «۳» ـ نقاط مشخص شده در نمودار را در جدول زیر تنظیم کرده‌ایم.

نقطه	a	b	c	D
نوع	اکسترمم نیست	ماکزیمم نسبی	مینیمم نسبی	اکسترمم نیست

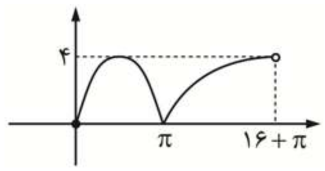
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۷- گزینه «۳» ـ نقاط به طول‌های ۲- و ۲ بحرانی‌اند اما اکسترمم نسبی نیستند. زیرا f در همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود و در نتیجه مشتق در آن نقاط وجود ندارد. $x = ۱$ نقطه بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست، زیرا $f'(۱) = ۰$ است ولی f در اطراف $x = ۱$ تغییر جهت نداده است.

پس مجموعاً در سه نقطه با طول‌های ۲ و ۱ و ۲- اکسترمم نداریم اما بحرانی هستند.

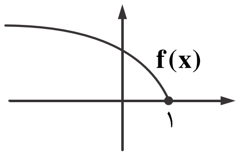
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی)

۸- گزینه «۱» ـ نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که $\text{Max} f(x) = ۴$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم‌های مطلق)

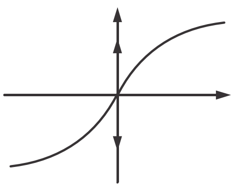
۹- گزینه «۳» ـ تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ یک نقطه بحرانی $x = ۱$ دارد.



تابع $g(x)$ هم یک نقطه بحرانی دارد.

$$g'(x) = ۴x^۳ + ۲۷ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}}$$ (نقطه بحرانی)

تابع $m(x)$ هم در $x = ۰$ بحرانی دارد.

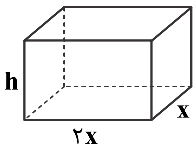


اما تابع $h(x)$ نقطه بحرانی ندارد. زیرا معادله $h'(x) = ۰$ ریشه حقیقی ندارد.

$$h'(x) = ۵x^۴ + ۱ > ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۱۰- گزینه «۴» ـ حجم را برابر ۹ قرار می دهیم.



$$۲x^۲h = ۹ \Rightarrow h = \frac{۹}{۲x^۲}$$

حال برای محاسبه هزینه تابعی می‌سازیم:

$$C(x) = x(۲x) \times ۲۰۰ + (۲xh + ۴xh) \times ۱۰۰ \Rightarrow C(x) = ۴۰۰x^۲ + ۶۰۰xh = ۴۰۰x^۲ + \frac{۲۷۰۰}{x}$$

$C(x)$ را مینیمم می‌کنیم:

$$C'(x) = ۸۰۰x - \frac{۲۷۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)

۱۱- گزینه «۳» ـ مختصات نقطه M را به‌صورت $M(x, \sqrt[۳]{x})$ در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث را تابعی از x می‌نویسیم:

$$S(x) = \frac{۱}{۲}|MA| \times |MB| = \frac{۱}{۲}(۸ - x)\sqrt[۳]{x}$$

$$S'(x) = \frac{۱}{۲}(-\sqrt[۳]{x} + \frac{۸ - x}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}) = \frac{۸ - ۴x}{۶\sqrt[۳]{x^۲}} = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad \Rightarrow S_{Max} = S(۲) = \frac{۱}{۲}(۸ - ۲)\sqrt[۳]{۲} = ۳\sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{۵۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)

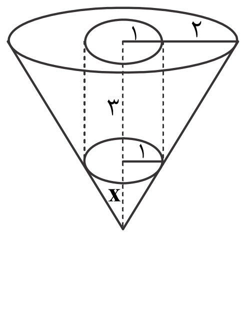
۱۲- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} x + y = ۱۲ \\ x^۲y = Max \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{y}{۱} \xrightarrow{x+y=۱۲} ۳y = ۱۲ \Rightarrow y = ۴, x = ۸$$

$$Max(x^۲y) = ۸^۲ \times ۴ = ۶۴ \times ۴ = ۲۵۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)

۱۳- گزینه «۲» ـ شکل حاصل به‌صورت مقابل خواهد بود.



تالس: $\frac{x}{x + ۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x = x + ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

مخروط بزرگ $V = \frac{\pi}{۳}(۳)^۲(۳ + \frac{۳}{۲}) = ۳\pi \times \frac{۹}{۲} = \frac{۲۷}{۲}\pi$

مخروط کوچک $V = \frac{\pi}{۳}(۱)^۲ \times \frac{۳}{۲} = \frac{\pi}{۲}$

استوانه $V = \pi(۱)^۲(۳) = ۳\pi$

اصلی $V = \frac{۲۷\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} - ۳\pi = ۱۰\pi$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ دوران)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$\begin{cases} MF + MF' = ۲a = ۳ \\ NF + NF' = ۲a = ۳ \end{cases} \Rightarrow \text{محیط } MFNF' = ۳ + ۳ = ۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ بیضی)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$\frac{\frac{c}{a}}{\frac{۲b}{۲a}} = \frac{c}{b} = ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ بیضی)

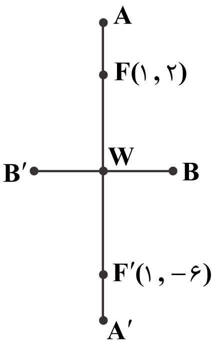
۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{۳c+a}{a-c}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۹c+۳a=۴a-۴c \Rightarrow ۱۳c=a \Rightarrow c=\frac{a}{۱۳}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=b^۲+(\frac{a}{۱۳})^۲ \Rightarrow a^۲-\frac{۱}{۱۶۹}a^۲=b^۲ \Rightarrow \frac{۱۶۸}{۱۶۹}a^۲=b^۲ \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۴۲}}{۱۳}a=b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۳}{۲\sqrt{۴۲}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ بیضی)

۱۷- گزینه «۴» ـ



$$|FF'|=۲c=۸ \Rightarrow c=۴ \ ، \ W(۱,-۲)$$

$$a+c=۹ \Rightarrow a=۵$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow b=۳$$

رئوس بیضی عبارتند از:

$$A(۱,۳)\,,\,A'(۱,-۷)\,,\,B'(-۲,-۲)\,,\,B(۴,-۲)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس اول ـ بیضی)

۱۸- گزینه «۲» ـ ابتدا مرکز و شعاع دایره $x^۲+y^۲-۴x+۶y-۱۲=۰$ را حساب می‌کنیم.

$$W(۲,-۳)\,,\,r=\sqrt{۴+۹+۱۲}=۵$$

پس نامعادله $x^۲+y^۲-۴x+۶y-۱۲>۰$ به‌صورت $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲>۲۵$ تبدیل می‌شود که نمایش نقاط خارج دایره است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ دایره)

۱۹- گزینه «۳» ـ باید فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره باشد.

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y-m=۰ \Rightarrow W(-۱,۱)\,,\,r=\sqrt{۲+m}$$

$$|WH|=r \Rightarrow \frac{|۲(-۱)+۱-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\sqrt{۲+m} \Rightarrow \frac{۴}{۵}=۲+m \Rightarrow m=\frac{۴}{۵}-۲=-\frac{۶}{۵}=-۱/۲ \Rightarrow r=\sqrt{۲-۱/۲}=\sqrt{۰/۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ اوضاع نسبی خط و دایره)

۲۰- گزینه «۴» ـ مرکز دایره $W(۰,۱)$ و شعاع آن ۴ است. فاصله مرکز دایره را تا نقاط داده شده محاسبه می‌کنیم.

$|WA|=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}<r=۴ \Rightarrow$ داخل دایره A

$|WB|=\sqrt{۰+۱}=۱<r=۴ \Rightarrow$ داخل دایره B

$|WC|=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}>r=۴ \Rightarrow$ خارج دایره C

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ اوضاع نسبی دایره و نقطه)

۲۱- گزینه «۱» ـ مرکز و شعاع دو دایره و خط المرکزین آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۸x+۱۶y-۱=۰ \Rightarrow W=(۴,-۸)\,,\,r=\sqrt{۱۶+۶۴+۱}=۹ \\ (x-۲)^۲+y^۲=۱۶ \Rightarrow W'=(۲,۰)\,,\,r'=۴ \end{cases}$$

خط المرکزین: $|WW'|=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}=d$

چون $|۹-۴|<d<۹+۴$ یعنی $|r-r'|<d<r+r'$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل ششم ـ درس دوم ـ اوضاع نسبی دو دایره)

۲۲- گزینه «۴» ـ اگر احتمال مبتلا شدن را P(k) در نظر بگیریم:

$$P(K) = \underbrace{P(M)}_{\substack{\text{احتمال}\\\text{مرد بودن}}} \; \underbrace{P(K/M)}_{\substack{\text{مبتلا به شرط}\\\text{مرد بودن}}} + \underbrace{P(Z)}_{\substack{\text{احتمال}\\\text{زن بودن}}} \times \underbrace{P(K/Z)}_{\substack{\text{مبتلا به شرط}\\\text{زن بودن}}}$$

$$P(K) = \frac{۱}{۲}\times ۰/۸ + \frac{۱}{۲}\times ۰/۶ = \frac{۱}{۲}\times ۱/۴ = ۰/۷$$

$$P(K') = ۱ - P(K) = ۰/۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل هفتم ـ احتمال کل)

۲۳- گزینه «۱» ـ

$$P(\text{قرمز}) = \frac{۱}{۴}\times ۱ + \frac{۱}{۴}\times ۰ + \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}(۱ + ۰ + \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}) = \frac{۱}{۴}\times\frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل هفتم ـ احتمال کل)

۲۴- گزینه «۲» ـ پیشامد زن بودن را با Z، مرد بودن را با M و باسواد بودن را با B نمایش می‌دهیم.

$$\frac{n(Z)}{n(M)} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow n(Z) = \frac{۴}{۳}n(M) \Rightarrow P(Z) = \frac{۴}{۳}P(M)$$

$$P(Z) + P(M) = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۳}P(M) + P(M) = ۱ \Rightarrow P(M) = \frac{۳}{۷}, P(Z) = \frac{۴}{۷}$$

$$P(Z\cup B) = P(Z) + P(B) - P(Z\cap B) = \frac{۴}{۷} + (\frac{۴}{۷}\times\frac{۴۰}{۱۰۰} + \frac{۳}{۷}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}) - \frac{۴}{۷}\times\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۵} = \frac{۲۰+۹}{۳۵} = \frac{۲۹}{۳۵}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل هفتم ـ احتمال کل)

۲۵- گزینه «۴» ـ در پرتاب تاس احتمال رو شدن عدد کمتر از ۳ برابر $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$ است.

$$P = \frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۶} = \frac{۳+۴}{۱۸} = \frac{۷}{۱۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل هفتم ـ احتمال کل)