ریاضی

۱- گزینه «۱» ـ

$$f(x)\rightarrow f(x+1)\rightarrow f(2x+1)$$

$$f(2x+1)=(2x+1)^2+4(2x+1)+1=4x^2+12x+6=g(x)$$

$$g(x)=-2 \Rightarrow 4x^2+12x+6=-2 \Rightarrow 4x^2+12x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

فاصله نقاط برخورد برابر $|-1+2|$ یعنی برابر ۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع) (متوسط)

۲- گزینه «۱» ـ

$$f(5)=-5\,,\,f(-5)=5$$

فرض می‌کنیم باقی‌مانده $g(x)$ بر x^2-25 برابر $ax+b$ باشد، پس:

$$xf(f(x))=(x^2-25)q(x)+ax+b$$

$$x=5 \Rightarrow 5f(f(5))=5a+b \Rightarrow 5f(-5)=5a+b \Rightarrow 5a+b=25$$

$$x=-5 \Rightarrow -5f(f(-5))=-5a+b \Rightarrow -5f(5)=-5a+b \Rightarrow -5a+b=25$$

$$\begin{cases} 5a+b=25 \\ -5a+b=25 \end{cases} \xrightarrow{+} 2b=50 \Rightarrow b=25 \Rightarrow a=0$$

پس باقی‌مانده برابر ۲۵ خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ تقسیم ـ بخش‌پذیری) (متوسط)

۳- گزینه «۲» ـ

$$(fof)(x)=(fof)(2x) \Rightarrow f(x^2+6)=f(4x^2+6) \Rightarrow (x^2+6)^2+6=(4x^2+6)^2+6 \Rightarrow (x^2+6)^2=(4x^2+6)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+6=4x^2+6 \Rightarrow x=0 \\ x^2+6=-4x^2-6 \Rightarrow 5x^2=-12 \Rightarrow x\in\varnothing \end{cases}$$

معادله فقط یک ریشه $x=0$ دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ چون تابع $\log_5^x$ اکیداً صعودی است، پس برای آن‌که $f(x)$ صعودی اکید باشد، باید $\frac{14-m}{m+2}$ مثبت باشد.

$$\frac{14-m}{m+2}>0 \Rightarrow -2<m<14 \xrightarrow{m\in\mathbb{N}} m\in\{1,2,\cdots,13\}$$

پس به ازای ۱۳ عدد طبیعی m، تابع $f(x)$ اکیداً صعودی خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

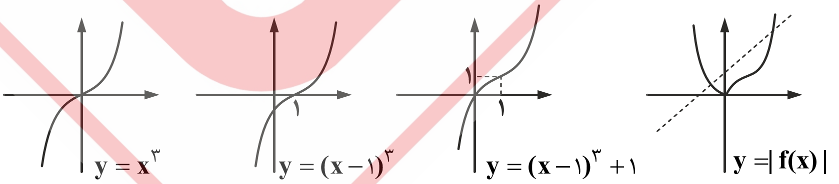
۵- گزینه «۱» ـ با توجه به نمودار $m\,,n>0$ است و دوره تناوب m و همچنین حداقل مقدار تابع برابر n است.

$$\begin{cases} T=\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{n\pi}{2}\right|}=m \Rightarrow \dfrac{4}{|n|}=m \\ 2n-|m|=n \xrightarrow{m>0} n=m \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{m}=m \Rightarrow m^2=4 \xrightarrow{m>0} m=2 \Rightarrow n=2$$

پس $m=n=2$ خواهد بود که $m+2n=6$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ تناوب) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ فرض می‌کنیم $f(x)=x^3-3x^2+3x$ باشد.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$



ملاحظه می‌کنید که در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ رسم $|f(x)|$) متوسط

۷- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{[-2x]+\sqrt{10}}{\sin 2x}=\frac{[-\pi]+\sqrt{10}}{\sin(\pi^-)}=\frac{-4+\sqrt{10}}{0^+}=-\infty$$

دقت کنید که $-4+\sqrt{10}<0$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حدنامتناهی) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ حد مخرج کسر باید صفر شود.

$$\lim_{x\to ۲}(x^۳+ax^۲-۳)=۰ \Rightarrow ۸+۴a-۳=۰ \Rightarrow ۴a=-۵ \Rightarrow a=-\frac{۵}{۴}$$

اکنون حد، $\frac{۰}{۰}$ شد، صورت و مخرج بر $x-۲$ بخش‌پذیر است.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x^۲-۱۲}{x^۳-\frac{۵}{۴}x^۲-۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۳x+۶)}{(x-۲)(x^۲+\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲})}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۳x+۶}{x^۲+\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲}}=\frac{۴+۶+۶}{۴+\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۶}{۷} \Rightarrow b=\frac{۱۶}{۷}\Rightarrow ۷b=۱۶$$

$$۴a+۷b=-۵+۱۶=۱۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حد $\frac{۰}{۰}$) (متوسط)

۹- گزینه «۱» ـ مفهوم این سؤال این است که مخرج کسر ریشه مضاعف $x=۲$ دارد، پس:

$$\text{مخرج}=(a+۱)(x-۲)^۲=(a+۱)(x^۲-۴x+۴)=(a+۱)x^۲-۴(a+۱)x+۴(a+۱)$$

با مقایسه داریم:

$$-۴(a+۱)=-۳ \Rightarrow a+۱=\frac{۳}{۴} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{a}{a+۱}=\frac{-\frac{۱}{۴}}{-\frac{۱}{۴}+۱}=\frac{-۱}{-۱+۴}=\frac{-۱}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ حد ـ حدنامتناهی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\cos ۳x=-\sin x \Rightarrow \cos ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}+x) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x \Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ ۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x \Rightarrow ۴x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مثلثات ـ معادله) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» ـ با توجه به اطلاعات مسئله $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۱$ است.

$$m_L=f'(۲)=m_{AB}=m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=۳ \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{۱}=\frac{۳-y_B}{۱}=۱ \Rightarrow \begin{cases} y_B=۲ \\ y_A=۱ \end{cases} \Rightarrow A(۰,۱),B(۱,۲)$$

$$\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{\sqrt{(۲-۳)^۲+(۱-۲)^۲}}{\sqrt{(۲-۱)^۲+(۰-۱)^۲}}=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x)g(x)f'(x)g'(x)=\sqrt[۳]{x^۲}\times\sqrt[۳]{x}\times\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۲}{۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قضایای مشتق‌گیری) (آسان)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$f(۲)=۲\,,f'(۲)=۳$$

$$h(x)=\frac{f(x+۳)}{g(x)+۳} \Rightarrow h'(x)=\frac{f'(x+۳)(g(x)+۳)-g'(x)f(x+۳)}{(g(x)+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱)=\frac{f'(۲)(g(-۱)+۳)-g'(-۱)f(۲)}{(g(-۱)+۳)^۲}$$

$$=\frac{۳(۷+۳)-۷(۲)}{(۷+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱)=\frac{۳۰-۱۴}{۱۰۰}=۰/۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قضایای مشتق‌گیری) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$f'(x)=\frac{\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f'(۸)=\frac{۲-\frac{۱}{۱۲}(۷)}{۴} \Rightarrow f'(۸)=\frac{۲۴-۷}{۴\times۱۲}=\frac{۱۷}{۴۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» ـ f و g بر هم در نقطه‌ای به طول ۱ مماس‌اند، پس:

$$f(۱)=g(۱) \Rightarrow \frac{a+b}{۴}=۰ \Rightarrow a+b=۰ \Rightarrow a=-b$$

$$f'(x)=\frac{۲ax+b}{۴}, g'(x)=۳x^۲$$

$$f'(۱)=g'(۱) \Rightarrow \frac{۲a+b}{۴}=۳ \Rightarrow ۲a+b=۱۲ \xrightarrow{a=-b} a=۱۲, b=-۱۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۳(x^۲-x) \Rightarrow f(۲)=۳(۴-۲)=۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» ـ

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۲a-۲=۲ \Rightarrow a=-۲$$

در همسایگی راست $x=۲$ داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'_+(۲)=\frac{۱}{۴}$$

در همسایگی چپ $x=۲$ داریم:

$$f(x)=-۲[-x]-x=-۲\times(-۲)-x \Rightarrow f'(x)=-۱ \Rightarrow f'_-(۲)=-۱$$

$$af'_+(۲)f'_-(۲)=-۲\times\frac{۱}{۴}\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» ـ دو حالت رخ می‌دهد:

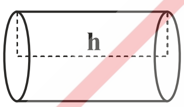
حالت اول: اگر $a=۰$ شود، تابع f یک تابع درجه دوم است که همواره یک نقطه بحرانی دارد.

حالت دوم: معادله $f'(x)=۰$ فقط ریشه مضاعف داشته باشد.

$$f'(x)=۳ax^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۱۲a=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

(نصیری) (دوازدهم) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ طول نقطه B را x فرض می‌کنیم، آن‌گاه $B(x, \sqrt{۱-x^۲})$ خواهد شد، پس از دوران داریم:



$$V=\pi r^۲h=\pi(۱-x^۲)(۲x)=۲\pi(x-x^۳)$$

$$V'=۲\pi(۱-۳x^۲)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$V_{max}=۲\pi\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱-\frac{۱}{۳})=۲\pi\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد ـ بهینه سازی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» ـ ریشه زیر رادیکال طول نقطه بحرانی است.

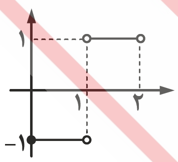
$$x-a=۰ \xrightarrow{x=۳} ۳-a=۰ \Rightarrow a=۳$$

نقطه A یکی از نقاط تابع است.

$$-۱=\sqrt[۳]{۳-۳}+۳+b \Rightarrow b=-۴ \Rightarrow a+b=-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقاط بحرانی) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» ـ تابع در $x=۰$ پیوستگی راست دارد، اما در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد و همچنین در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.



$$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=-x+۱ \Rightarrow f'(x)=-۱$$

$$۱<x<۲ \Rightarrow f(x)=x-۱+۱ \Rightarrow f'(x)=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق پایه دوازدهم ـ نمودار مشتق) (متوسط)

۲۱- گزینه «۱» ـ

$$y=۲x^۳-۳x^۲-k \Rightarrow y'=۶x^۲-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-k \\ x=۱ \Rightarrow y=-۱-k \end{cases}$$

پس اکسترمم‌های نسبی $A(۰,-k)$ و $B(۱,-۱-k)$ می‌باشد.

$$|AB|=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۱-k+k)^۲}=\sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم‌های نسبی) (آسان)

۲۲- گزینه «۳» ـ مرکز دایره روی خط $y = x - 1$ قرار دارد، پس مرکز را $W(\alpha , \alpha - 1)$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌های $A(3 , 2)$ و $B(0 , 4)$ روی دایره قرار دارند، پس:

$$r = |WA| = |WB| \Rightarrow (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 1 - 2)^2 = (\alpha - 0)^2 + (\alpha - 1 - 4)^2 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = \alpha^2 + \alpha^2 - 10\alpha + 25$$

$$\Rightarrow -12\alpha + 18 = -10\alpha + 25 \Rightarrow 2\alpha = -7 \Rightarrow \alpha = \frac{-7}{2} \Rightarrow W(\frac{-7}{2} , \frac{-9}{2})$$

خطی که از W بگذرد، قطری از دایره خواهد بود، پس جواب مسئله $x + y = -8$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره) (متوسط)

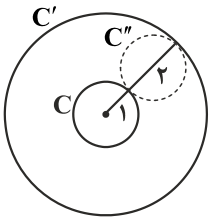
۲۳- گزینه «۳» ـ مرکز دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$(-\frac{m}{2} , 3) = (-2 , -\frac{n}{2}) \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -6 \end{cases}$$

$$C : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{4 + 9 - 12} = 1$$

$$C' : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow r' = \sqrt{4 + 9 - 4} = 3$$

حال دو دایره با مرکزهای یکسان و شعاع‌های ۱ و ۳ داریم. دایره‌ای که بر هر دوی آن‌ها مماس باشد به‌صورت زیر است:



با توجه به نمودار قطر دایره C'' برابر ۲ و در نتیجه شعاع آن ۱ است. مساحت آن برابر است با:

$$S = \pi R^2 = \pi(1)^2 = \pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره) (دشوار)

۲۴- گزینه «۲» ـ

$$S_{A'FB'} = \frac{9}{2}|WB'| \Rightarrow \frac{1}{2}|FA'| \times |WB'| = \frac{9}{2}|WB'| \Rightarrow |FA'| = 9 \Rightarrow a + c = 9$$

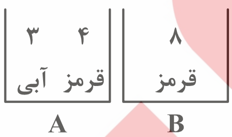
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = 1 \Rightarrow (a - c)(a + c) = 1 \xrightarrow{a+c=9} a - c = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ a - c = \frac{1}{9} \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = \frac{82}{9} \Rightarrow a = \frac{41}{9} , c = 9 - \frac{41}{9} = \frac{40}{9}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{41}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ بیضی) (متوسط)

۲۵- گزینه «۳» ـ



$$P(A) + P(B) = 1 \xrightarrow{P(A)=3P(B)} \begin{cases} P(B) = \frac{1}{4} \\ P(A) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

جعبه A $\frac{3}{4}$ $\xrightarrow{\text{هر دو همرنگ}}$ $\frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3 + 6}{21} = \frac{3}{7}$

جعبه B $\frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\text{هر دو همرنگ}}$ 1

$$P(\text{هر دو همرنگ}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{9}{28} + \frac{7}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ احتمال ـ قاعده کل) (متوسط)