ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ چون $f'(-۲)+f'(-۴)=۰$ است پس:

$$\frac{-۴-۲}{۲}=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow ۶=\frac{b}{a} \Rightarrow b=۶a$$

$$af'(x)>۰ \Rightarrow a(۲ax+b)>۰ \Rightarrow a(۲ax+۶a)>۰ \Rightarrow ۲a^۲(x+۳)>۰ \xrightarrow[a\neq ۰]{a^۲>۰} x>-۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قوانین مشتق)

۲- گزینه «۲» ـ

$$y=gof(x)+f^۳(x) \Rightarrow y'=f'(x)g'(f(x))+۳f^۲(x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=۱} y'(۱)=f'(۱)g'f(۱)+۳f^۲(۱)f'(۱)=۳g'(۵)+۳\times(۵)^۲\times ۳$$

$$\Rightarrow y'(۱)=۳(-۳)+۹\times ۲۵=۲۲۵-۹=۲۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق ترکیب)

۳- گزینه «۲» ـ

$$(x^۲+۲)f''(x)+۲xf'(x)=((x^۲+۲)f'(x))'=((x^۲+۲)\times\frac{x}{\sqrt{x^۲+۲}})'$$

$$=(x\sqrt{x^۲+۲})'=(xf(x))'$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مرتبه دوم)

۴- گزینه «۴» ـ برای $x>۴$ عبارت $x^۲+۳x$ مثبت است پس تابع به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۳| & x\leq ۴\\ x^۲+۳x-۲۷ & x>۴\end{cases}$$

این تابع در $x=۴$ پیوسته است زیرا:

$$f(x)=\lim_{x\to ۴} f(x)=۱$$

این تابع در $x=۴$ نقطه‌ای گوشه‌ای دارد زیرا $f'_+(۴)\neq f'_-(۴)$ ، همچنین در $x=۳$ نقطه گوشه‌ای دارد. پس تابع $f(x)$ در نقاط $(۴,۱)$ و $(۰,۳)$ نقاط گوشه‌ای دارد و در نتیجه عرض نقاط گوشه‌ای تابع $۲f(x+۱)+۲$ برابر است با:

$$y_۱=۲\times ۱+۲=۴ \qquad y_۲=۲\times ۰+۲=۲$$

مجموع عرض‌ها برابر ۶ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ نقطه گوشه‌ای)

۵- گزینه «۱» ـ

$$\frac{۱}{p}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{q}=\frac{q-۲}{۲q} \Rightarrow p=\frac{۲q}{q-۲}$$

$$p'=\frac{۲(q-۲)-۲q}{(q-۲)^۲}=\frac{-۴}{(q-۲)^۲} \Rightarrow p'(۷)=\frac{-۴}{۲۵}=-۰/۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای)

۶- گزینه «۲» ـ نکته: تابع $f(x)=\sqrt[۳]{ax^۲+bx+c}$ در ریشه‌های ساده $ax^۲+bx+c=۰$ مشتق ندارد (زیرا مشتق آن ∞ می‌شود)، پس باید $x=۱$ و $x=b$ ریشه‌های معادله $x^۲+x+a=۰$ باشد.

$$x=۱ \Rightarrow ۱+۱+a=۰$$

$$\Rightarrow a=-۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow b=-۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق پذیری)

۷- گزینه «۱» ـ

$$f'(x)=\frac{۲x(۱+\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x^۲+۱)}{(۱+\sqrt{x})^۲} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۸(۳)-\frac{۱}{۴}(۱۷)}{(۱+۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{۲۴-\frac{۱۷}{۴}}{۹}=\frac{۷۹}{۳۶}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ)

۸- گزینه «۲» ـ چون $\frac{۱}{۴}$ طول اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است و همچنین $f(x)$ در $x=\frac{۱}{۴}$ مشتق‌پذیر است پس $f'(\frac{۱}{۴})=۰$ است.

$$f'(x)=۲x-a(\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}})$$

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}-a(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}a=۰ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$f'(۱)=۲-a(۱+\frac{۱}{۲})=۲-\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۹- گزینه «۳» ـ

$$V=\pi r^۲h \xrightarrow{h=۶-r} V=\pi r^۲(۶-r)=\pi(۶r^۲-r^۳)$$
$$\Rightarrow V'=\pi(۱۲r-۳r^۲)=۰ \xrightarrow{r\neq ۰} r=۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه سازی)

۱۰- گزینه «۱» ـ مفهوم این سوال این است که باید تابع $f(x)$ تابع ثابت باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} m+۱=-۱ \Rightarrow m=-۲ \\ ۱-k=۰ \Rightarrow k=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow m+k=-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی)

۱۱- گزینه «۴» ـ نکته: $q(x)$ و $p(x)$ مشتق‌پذیر باشد، نقاط بحرانی تابع $|p(x)|q(x)|$ از حل دو معادله $q(x)=۰ , (pq)'=۰$ بدست می‌آید.

نقاط بحرانی تابع $x|x^۲-۴|$ برابر است با:

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$$

$$(x(x^۲-۴))'=۰ \Rightarrow (x^۳-۴x)'=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-۲,-\frac{۲}{\sqrt{۳}},۱\}$ می‌باشد.

$$f(-۲)=۰ , f(-\frac{۲}{\sqrt{۳}})=-\frac{۲}{\sqrt{۳}}|\frac{۴}{۳}-۴|=\frac{-۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۸}{۳}=\frac{-۱۶}{۳\sqrt{۳}} , f(۱)=۳$$

پس بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم مطلق)

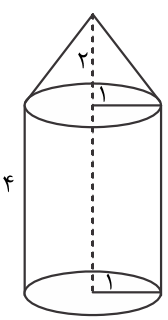
۱۲- گزینه «۳» ـ تابع در نقاط $\{-۲ , ۰ , ۲\}$ بحرانی دارد زیرا در همسایگی این نقاط تعریف نشده و در نتیجه ناپیوسته‌اند که منجر به نقاط بحرانی می‌شود.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-۱}{۲\sqrt{-x+۲}} & ۰<x<۲ \\ \frac{۲x+۲}{۲\sqrt{x^۲+۲x}} & x<-۲ \end{cases}$$

با توجه به تابع $f'(x)$، تابع $f(x)$ بحرانی دیگری ندارد پس در مجموع سه نقطه بحرانی دارد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقاط بحرانی)

۱۳- گزینه «۳» ـ شکل حاصل از دوران سطح ذوزنقه‌ای شکل یک مخروط و یک استوانه خواهد بود.



$$V_۱=\frac{\pi}{۳}(۱)^۲(۲)=\frac{۲\pi}{۳}$$
$$V_۲=\pi(۱)^۲(۴)=۴\pi$$
$$V_۱+V_۲=\frac{۲}{۳}\pi+۴\pi=\frac{۱۴}{۳}\pi$$

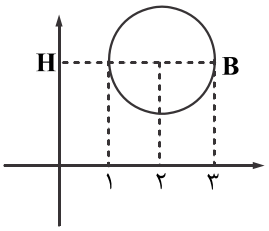
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دوران)

۱۴- گزینه «۲» ـ صفحه مورد نظر مستطیلی به عرض یال مکعب و به طول قطر وجه می‌باشد.

$$S = a \times a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = (1)^2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ برش‌ها)

۱۵- گزینه «۱» ـ



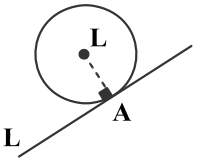
چون مکان مورد نظر دایره است پس:

$$a - 4 = 1 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$$

$$\text{دایره}: x^2 + y^2 - 4x - 4y = -7 \Rightarrow \begin{cases} O = (2,2) \\ R = \sqrt{4+4-7} = 1 \end{cases}$$

به نمودار توجه کنید، بیشترین فاصله نقاط دایره از محور yها برابر $BH = 3$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره)

۱۶- گزینه «۲» ـ



مرکز دایره $W(-1,-2)$ می‌باشد، نقطه A روی دایره قرار دارد، و خط L بر دایره در نقطه A مماس است. پاره‌خط WA بر L مماس است.

$$m_{WA} = \frac{-6+2}{1+1} = -2 \Rightarrow m_L = \frac{1}{2}$$

$$L: y + 6 = \frac{1}{2}(x-1) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{2} - 6 = -6/5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره)

۱۷- گزینه «۴» ـ باید نقطه M خارج دایره باشد پس در نتیجه قوت نقطه M باید مثبت باشد.

$$(-1)^2 + (2)^2 - 4(-1) - m(2) - 8 > 0$$

$$1 + 4 + 4 - 2m - 8 > 0 \Rightarrow 2m < 1 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow \omega(1,2), r = \sqrt{1+4-4} = 1$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \omega'(-1,-2), r' = \sqrt{1+4-1} = 2$$
$$d = \omega\omega' = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}$$

چون $d > r + r'$ است، پس دو دایره متخارجند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره)

۱۹- گزینه «۲» ـ طول مستطیل برابر $2a$ و عرض آن برابر $2b$ خواهد بود.

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{8}{9}$$

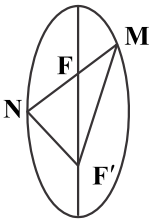
$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow a = 3b$$

اگر دو قطر مستطیل را d فرض کنیم

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9b^2 + b^2} = b\sqrt{10} \Rightarrow \frac{d}{b} = \sqrt{10}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ بیضی)

۲۰- گزینه «۲» ـ



$2a = 10 \Rightarrow a = 5$

با توجه به تعریف بیضی

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ NF + NF' = 2a \end{cases}$$

محیط مثلث MNF' را P فرض می‌کنیم:

$$P = MF + MF' + NF + NF' = 2a + 2a = 4a = 20$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ بیضی)

۲۱- گزینه «۱» ـ A, F, F' در یک راستا قرار دارند.

$$m_{FF'} = m_{FA} \Rightarrow \frac{3-2}{2-1} = \frac{p-2}{-1-1} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow F'(-1, 0)$$

$$2c = |FF'| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

$$a - c = |AF| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow a - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ بیضی)

۲۲- گزینه «۲» ـ شرط دایره بودن معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ این است که $a^2 + b^2 > 4c$ باشد. پس در این مسئله:

$$(2)^2 + (-6)^2 > 4m \Rightarrow 4 + 36 > 4m \Rightarrow m < 10$$

مقادیر طبیعی m، $\{1, 2, \ldots, 9\}$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ هندسه ـ دایره)

۲۳- گزینه «۳» ـ راه اول:

$$P(\text{دومی سفید}) = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سفید}) + P(\text{اولی سیاه}) \times P(\text{دومی سفید})$$

$$= \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{2}{5}$$

راه دوم: به مهره اول توجه نمی‌کنیم .

$$P(\text{دومی سفید}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ احتمال)

۲۴- گزینه «۴» ـ

$$P = 0/4 \times 0/1 + 0/1 \times 0/4 + 0/35 \times 0/1 = 0/08 + 0/035 = 0/115$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ احتمال)

۲۵- گزینه «۱» ـ چون تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، سه برابر تعداد دانش‌آموزان مدرسه B است پس:

$$P(a) = \frac{3}{4} \times \frac{30}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{20}{100} = \frac{9+2}{40} = \frac{11}{40}$$

$$P(A') = 1 - \frac{11}{40} = \frac{29}{40}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ احتمال)