حسابان

۱- گزینه «۱» ـ اگر معادله $f(x)=0$ را حل کنیم نقاط برخورد با محور xها به‌دست می‌آید.

$$\sqrt{x}-x=0 \Rightarrow \sqrt{x}=x \xrightarrow{(\ )^2} x=x^2 \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x=0,1 \Rightarrow b=1$$

در نقطه‌ای به طول a خط مماس افقی است، پس مشتق در این نقطه صفر است.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

پس معادله خط Δ به‌صورت $y=\frac{1}{4}$ است. حال معادله خط L را می‌نویسیم:

$$m_L=f'(1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow L: y-0=-\frac{1}{2}(x-1) \quad (*)$$

خط L و Δ را با هم قطع می‌دهیم:

$$(*): y=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}=-\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول و دوم ـ مماس و مشتق)

۲- گزینه «۲» ـ خواسته مسئله مشتق تابع $g(x)=f^3(x)$ به ازای $x=2$ است.

$$g(x)=f^3(x)=(1-\frac{1}{x})^4 \Rightarrow g'(x)=4(1-\frac{1}{x})^3(\frac{1}{x^2}) \Rightarrow g'(2)=4(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{4})=\frac{1}{8}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ تعریف و محاسبه مشتق)

۳- گزینه «۱» ـ تابع f در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$f(0)=0 \ ،\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cos x=0 \ ،\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x\sin x=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\sin x+x\cos x & x<0\\ \cos x-x\sin x & x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_+(0)=1\\ f'_-(0)=0\end{cases} \Rightarrow f'_+(0)+f'_-(0)=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری)

۴- گزینه «۳» ـ

$$f'(x)=3\cos x+4\sin x \Rightarrow f''(x)=-3\sin x+4\cos x \ ،\ g''(x)=4\cos x$$

$$f''(x)+g''(x)=-3\sin x+8\cos x \Rightarrow A=-3 , B=8 \Rightarrow A+B=5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق دوم)

۵- گزینه «۴» ـ تابع f در $x=1$ و $x=3$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است، زیرا:

$$f(1)=1 \ ،\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+3x)=4 \ ،\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}|x-2|=1$$

$$f(3)=-1 \ ،\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\sqrt[3]{-1}=-1 \ ،\ \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}|x-2|=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & 0<x<1\\ \dfrac{x-2}{|x-2|} & 1<x<3 , x\neq 2\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}} & 3<x<4\end{cases}$$

پس تابع f در نقاط $\{1 , 2 , 3 , 4\}$ مشتق ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری در بازه)

۶- گزینه «۳» ـ

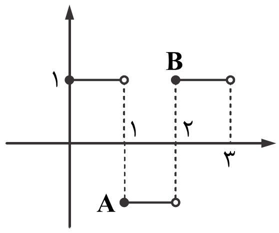
$$f'(x) = -\frac{۴}{x^۲}$$

$$f'(c) = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} \Rightarrow \frac{-۴}{c^۲} = \frac{۱-۴}{۳} \Rightarrow c^۲ = ۴ \xrightarrow{۱<c<۴} c = ۲$$

$$f'(۲c) = f'(۴) = -\frac{۴}{۱۶} = -۰/۲۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ لحظه‌ای و متوسط)

۷- گزینه «۱» ـ نمودار تابع $f(x) = (-۱)^{[x]}$ را در بازه $[۰ , ۲)$ رسم می‌کنیم:



$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = (-۱)^۰ = ۱$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = (-۱)^۱ = -۱$$

$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = (-۱)^۲ = ۱$$

ملاحظه می‌کنید که نقطه $A(۱ , -۱)$ مینیمم نسبی و نقطه $B(۲ , ۱)$ ماکزیمم نسبی تابع f است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۸- گزینه «۲» ـ چون تابع چند جمله‌ای است و اکسترممی به طول ۵ دارد، پس $f'(۵) = ۰$ است.

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f'(۵) = ۳ \times ۲۵ + ۱۰a + b = ۰ \Rightarrow ۱۰a + b = -۷۵ \quad (۱)$$

یکی از صفرهای تابع $f(x)$ عدد ۱ است، پس:

$$f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱ + a + b + ۲۰ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲۱ \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱۰a + b = -۷۵ \\ a + b = -۲۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۹a = -۵۴ \Rightarrow a = -۶$$

$$a = -۶ \xrightarrow{(۲)} b = -۲۱ + ۶ = -۱۵$$

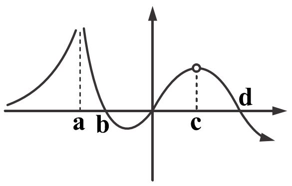
$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow x = -۱ , ۵$$

پس طول اکسترمم دیگر تابع -۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۹- گزینه «۱» ـ تابع در همسایگی $x = ۰$ و $x = ۵$ تعریف نمی‌شود پس مشتق ندارد. در $x = ۴$ (نقطه شکستگی قدرمطلق) مشتق ندارد، تابع در $x = ۱$ ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است. ضمناً $f'(x)$ در نقاط به طول‌های $\frac{۱}{۲}$ و ۲ صفر است، پس مجموعه نقاط بحرانی این تابع $\{۰ , \frac{۱}{۲} , ۱ , ۲ , ۴ , ۵\}$ است که مجموع آن‌ها ۱۲/۵ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۱۰- گزینه «۳» ـ تابع f' در نقاط به طول‌های $\{b , ۰ , d\}$ محور xها را قطع کرده است یعنی مشتق در آن‌ها صفر است. f' در a و c وجود ندارد، پس f پنج نقطه بحرانی دارد.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۱۱- گزینه «۴» ـ هر اکسترممی (چه نسبی و چه مطلق) بحرانی است اما عکس این جمله صحیح نیست، یعنی ممکن است یک نقطه بحرانی باشد اما اکسترمم نباشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم‌ها و بحرانی)

۱۲- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x+۱)-x^{۳}}{(x+۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}(۳x+۳-x)}{(x+۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}(۲x+۳)}{(x+۱)^{۲}}=۰ \Rightarrow x=۰,-\frac{۳}{۲}$$

نقاط بحرانی تابع $x=۰$ و $x=۱$ خواهد بود. دقت داشته باشید که $x=-\frac{۳}{۲}$ در دامنه تابع قرار ندارد.

$$\begin{cases} f(۰)=۰=\min(f(x)) \\ f(۱)=\frac{۱}{۲}=\max(f(x)) \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم مطلق)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$x-c=۰ \xrightarrow{x=-۱} -۱-c=۰ \Rightarrow c=-۱$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a=۴ \Rightarrow f(x)=\frac{۴x}{x+۱} \Rightarrow f(۰)=۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ رسم توابع)

۱۴- گزینه «۳» ـ طبق شکل چون $f(x)$ بالای محور xها است پس $f(x)>۰$ است و همچنین چون تابع صعودی اکید است پس $f'(x)>۰$ می‌باشد. تقعر تابع $f(x)$ رو به پایین است، در نتیجه $f''(x)<۰$ می‌باشد، با توجه به توضیحات $f(x)f'(x)f''(x)$ همواره منفی خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ تقعر)

۱۵- گزینه «۱» ـ مفهوم سؤال این است که مشتق کدام تابع نامنفی است یعنی مثبت و صفر است. دقت کنید که باید تعداد نقاطی که مشتق در آن صفر باشد قابل شمارش باشد.

$$۱)\ y=\frac{۱}{۵}x^{۵}-\frac{۱}{۲}x^{۴}+\frac{۱}{۳}x^{۳} \Rightarrow y'=x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}=x^{۲}(x^{۲}-۲x+۱) \Rightarrow y'=x^{۲}(x-۱)^{۲}$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$+$	۰	$+$	

$$۲)\ y=-x-x^{۳} \Rightarrow y'=-۱-۳x^{۲}<۰$$

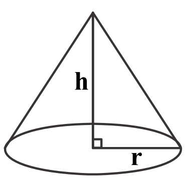
$$۳)\ y=x^{۳}+x+۱ \Rightarrow y'=۳x^{۲}+۱>۰$$

$$۴)\ y=x^{۳}-x \Rightarrow y'=۳x^{۲}-۱=۰ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

با توجه به محاسبات بالا تابع مربوط به گزینه «۱» جواب است چون در دو نقطه مشتقش صفر و در سایر نقاط مشتق آن مثبت است. سایر توابع چنین شرایطی ندارند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ یکنوایی تابع)

۱۶- گزینه «۳» ـ



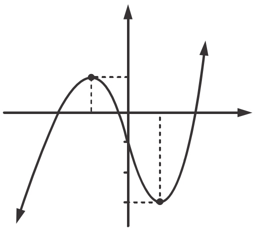
$$\left.\begin{array}{l} r+h=۶ \\ V=\frac{\pi}{۳}r^{۲}h=\max \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{r}{۲}=\frac{h}{۱} \xrightarrow{r+h=۶} ۲h+h=۶ \Rightarrow h=۲,\ r=۴$$

$$V_{\max}=\frac{\pi}{۳}(۴)^{۲}(۲)=\frac{۳۲}{۳}\pi$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ بهینه‌سازی)

۱۷- گزینه «۱» ـ جدول تغییرات تابع را تنظیم می‌کنیم:

$$y = x^3 - 3x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

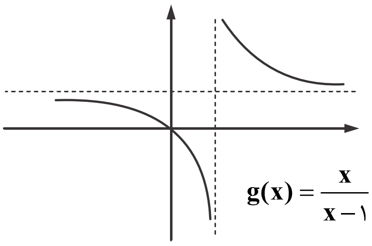


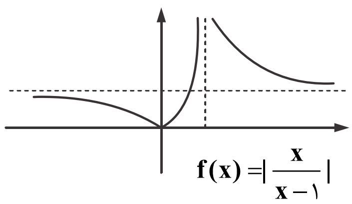
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

دقت کنید که $f(0) = -1$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ رسم تابع)

۱۸- گزینه «۲» ـ ابتدا تابع $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ مجانب‌ها} \qquad g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$





نمودار $f(x)$ را ببینید، تقعر تابع در فاصله $(-\infty , 0)$ رو به پایین است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ رسم تابع)

۱۹- گزینه «۲» ـ مفهوم سؤال این است که مشتق دوم تغییر علامت ندهد.

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2mx \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6x + 2m \geq 0 \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4(12)(2m) \leq 0 \xrightarrow{\div 12} 3 - 8m \leq 0 \Rightarrow m \geq \frac{3}{8}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ تقعر)

۲۰- گزینه «۴» ـ طبق نمودار:

$$f''(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = ax^4 + bx^3$$

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 \,,\, y'(\frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow (\frac{3}{2})^2(4a \times \frac{3}{2} + 3b) = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{4} \Rightarrow (\frac{3}{2})^3(\frac{3}{2}a + b) = \frac{27}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}a + b = 2 \xrightarrow{b=-2a} \frac{3}{2}a - 2a = 2 \xrightarrow{\times 2} 3a - 4a = 4 \Rightarrow a = -4 \,,\, b = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = -4x^4 + 8x^3 = 4x^3(2 - x) \Rightarrow p = 2$$

$$a + b + p = -4 + 8 + 2 = 6$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار)