حسابان

۱- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)-2f(x+h)}{h(h+1)}=4x+f'(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h+1}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x+f'(x)$$

$$\Rightarrow -2f'(x)=4x+f'(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{3}x \Rightarrow f'(3)=-4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ تعریف مشتق)

۲- گزینه «۲» ـ

$$y=gof(x)+f^3(x) \Rightarrow y'=f'(x)g'(f(x))+3f^2(x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1)=f'(1)g'f(1)+3f^2(1)f'(1)=3g'(5)+3\times(5)^2\times 3$$

$$\Rightarrow y'(1)=3(-3)+9\times 25=225-9=216$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق ترکیب)

۳- گزینه «۲» ـ

$$(x^2+2)f''(x)+2xf'(x)=((x^2+2)f'(x))'=((x^2+2)\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}})'$$

$$=(x\sqrt{x^2+2})'=(xf(x))'$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مرتبه دوم)

۴- گزینه «۴» ـ برای $x>4$ عبارت x^2+3x مثبت است پس تابع به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}|x-3| & x\le 4\\ x^2+3x-27 & x>4\end{cases}$$

این تابع در $x=4$ پیوسته است زیرا:

$$f(x)=\lim_{x\to 4}f(x)=1$$

این تابع در $x=4$ نقطه‌ای گوشه‌ای دارد زیرا $f'_+(4)\neq f'_-(4)$ ، همچنین در $x=3$ نقطه گوشه‌ای دارد. پس تابع $f(x)$ در نقاط $(4\,,1)$ و $(3\,,0)$ نقاط گوشه‌ای دارد و در نتیجه عرض نقاط گوشه‌ای تابع $2f(x+1)+2$ برابر است با:

$$y_1=2\times 1+2=4 \qquad y_2=2\times 0+2=2$$

مجموع عرض‌ها برابر ۶ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ نقطه گوشه‌ای)

۵- گزینه «۳» ـ

$$y=\frac{1}{\sin 2x} \Rightarrow y'=\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

$$y''=-2\times\frac{-2\sin 2x\sin^2 2x-2\times 2\sin 2x\cos 2x\cos 2x}{\sin^4 2x}$$

$$y''=4\times\frac{\sin^2 2x+2\cos^2 2x}{\sin^3 2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(\frac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=1\\ y''(\frac{\pi}{4})=\dfrac{4\times 1}{1}=4\end{array}\right\}\xrightarrow{+} y+y''=5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مرتبه دوم)

۶- گزینه «۱» ـ

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{q}=\frac{q-2}{2q} \Rightarrow p=\frac{2q}{q-2}$$

$$p'=\frac{2(q-2)-2q}{(q-2)^2}=\frac{-4}{(q-2)^2} \Rightarrow p'(7)=\frac{-4}{25}=-0/16$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ آهنگ لحظه‌ای)

۷- گزینه «۲» ـ چون $\frac{1}{4}$ طول اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است و همچنین $f(x)$ در $x=\frac{1}{4}$ مشتق‌پذیر است پس $f'(\frac{1}{4})=0$ است.

$$f'(x)=2x-a(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}})$$

$$f'(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-a(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}a=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

$$f'(1)=2-a(1+\frac{1}{2})=2-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۸- گزینه «۳» ـ

$$V=\pi r^2 h \xrightarrow{h=6-r} V=\pi r^2(6-r)=\pi(6r^2-r^3)$$

$$\Rightarrow V'=\pi(12r-3r^2)=0 \xrightarrow{r\neq 0} r=4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه سازی)

۹- گزینه «۱» ـ مفهوم این سوال این است که باید تابع $f(x)$ تابع ثابت باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} m+1=-1 \Rightarrow m=-2 \\ 1-k=0 \Rightarrow k=1 \end{array}\right\} \Rightarrow m+k=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی)

۱۰- گزینه «۲» ـ تابع $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم

$$f'(x)=(x-1)(x-4)(x-1)(3x-7)=(x-1)^2(x-4)(3x-7)$$

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

تابع f در $x=\frac{7}{3}$ ماکزیمم نسبی و در $x=4$ مینیمم نسبی دارد. دقت کنید کـه f' در $x=1$ تغییـر علامـت نـداده اسـت پـس f در $x=1$ اکسترمم نسبی ندارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۱۱- گزینه «۴» ـ نکته: $q(x)$ و $p(x)$ مشتق‌پذیر باشد، نقاط بحرانی تابع $p(x)|q(x)|$ از حل دو معادله $(pq)'=0\,,\,q(x)=0$ به دست می‌آید.

نقاط بحرانی تابع $x|x^2-4|$ برابر است با:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$(x(x^2-4))'=0 \Rightarrow (x^3-4x)'=0 \Rightarrow 3x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-2,-\frac{2}{\sqrt{3}},1\}$ می‌باشد.

$$f(-2)=0\,,\,f(-\frac{2}{\sqrt{3}})=-\frac{2}{\sqrt{3}}|\frac{4}{3}-4|=\frac{-2}{\sqrt{3}}\times\frac{8}{3}=\frac{-16}{3\sqrt{3}}\,,\,f(1)=3$$

پس بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم مطلق)

۱۲- گزینه «۲» ـ مشتق تابع در $x=0$ صفر است، پس:

$$y'=-3x^3+12x^2-12x+a=0 \Rightarrow a=0$$

تابع در نقطه‌ای به طول x_0، $(x_0>0)$ روی محور x نقطه‌ی عطف افقی دارد. پس در این نقطه y'' تغییر علامت می‌دهد.

$$y''=-9x^2+24x-12=-3(3x^2-8x+4)=-3(3x-2)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

با توجه به شکل و توضیحات فوق $x_0=2$ جواب است. چون تابع از $(2\,,\,0)$ می‌گذرد، داریم:

$$0=-12+32-24+b \Rightarrow b=4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نمودار شناسی)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$\frac{-b}{۳a}=۱ \Rightarrow b=-۳a \quad (۱)$$

$$f(۱)=-۲ \Rightarrow a+b+a+b=-۲ \Rightarrow a+b=-۱$$

$$\xrightarrow{(۱)} a-۳a=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}, b=\frac{-۳}{۲}$$

$$f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx=\frac{۳}{۲}x^{۲}-۳x \Rightarrow f'(۱)=\frac{-۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ عطف و تقعر)

۱۴- گزینه «۱» ـ

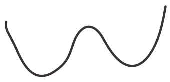
$$y=۹x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲۰x^{۲} \xrightarrow{x>۰} y=۹x^{\frac{۸}{۳}}-۲۰x^{۲} \Rightarrow y'=۹\times\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-۴۰x$$

$$\Rightarrow y''=۹\times\frac{۸}{۳}\times\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-۴۰=۴۰(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱)=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

نقطه عطف با طول مثبت برابر یک پس عرض آن $f(۱)=-۱۱$ می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ عطف)

۱۵- گزینه «۲» ـ اگر f' را تعیین علامت کنیم آن‌گاه می‌توان نمودار تقریبی $f(x)$ را رسم کرد.

x		a		b		c	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

نمودار تقریبی $f(x)$ به صورت  است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نمودار شناسی)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-۱ \Rightarrow \frac{a}{۳}=-۱ \Rightarrow a=-۳$$

$$۳x+d=۰ \xrightarrow{x=۶} ۳(۶)+d=۰ \Rightarrow d=-۱۸$$

$$f(x)=\frac{-۳x+b}{۳x-۱۸} \qquad , \qquad f(۰)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{b}{-۱۸}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=-۶$$

$$f(x)=\frac{-۳x-۶}{۳x-۱۸}=\frac{۳(-x-۲)}{۳(x-۶)}=\frac{-x-۲}{x-۶}$$

$$f'(x)=\frac{۶+۲}{(x-۶)^{۲}}=\frac{۸}{(x-۶)^{۲}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-۱۶}{(x-۶)^{۳}}>۰$$

$$\Rightarrow x-۶<۰ \Rightarrow x<۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ تابع هموگرافیک)