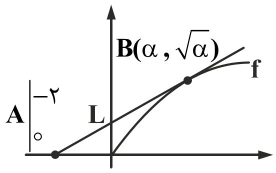
حسابان

۱- گزینه «۳» ـ



$$m_L = f'(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha} - ۰}{\alpha + ۲}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha = \alpha + ۲ \Rightarrow \alpha = ۲$$

$$\text{خط مماس}: y - ۰ = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(x + ۲) \xrightarrow{y=\sqrt{۸}} \sqrt{۸} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}(x+۲) \Rightarrow x + ۲ = ۸ \Rightarrow x = ۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (دشوار)

۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x)g(x)f'(x)g'(x) = \sqrt[۳]{x^۲} \times \sqrt[۳]{x} \times \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۲}{۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قضایای مشتق‌گیری) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ

$$f(۲) = ۲ , f'(۲) = ۳$$

$$h(x) = \frac{f(x+۳)}{g(x)+۳} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x+۳)(g(x)+۳) - g'(x)f(x+۳)}{(g(x)+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱) = \frac{f'(۲)(g(-۱)+۳) - g'(-۱)f(۲)}{(g(-۱)+۳)^۲}$$

$$= \frac{۳(۷+۳) - ۷(۲)}{(۷+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱) = \frac{۳۰ - ۱۴}{۱۰۰} = ۰/۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ قضایای مشتق‌گیری) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ

$$f'(x) = x^۲ f(x) + ۶ \Rightarrow f''(x) = ۲xf(x) + x^۲ f'(x) \Rightarrow f''(x) = ۲xf(x) + x^۲(x^۲ f(x) + ۶) = (۲x + x^۴)f(x) + ۶x^۲$$

$$\Rightarrow f''(-\sqrt[۳]{۲}) = (-۲\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۱۶})f(-\sqrt[۳]{۲}) + ۶(-\sqrt[۳]{۲})^۲ = ۶\sqrt[۳]{۴}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مرتبه دوم) (دشوار)

۵- گزینه «۴» ـ

$$f'(x) = \frac{\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f'(۸) = \frac{۲ - \frac{۱}{۱۲}(۷)}{۴} \Rightarrow f'(۸) = \frac{۲۴ - ۷}{۴ \times ۱۲} = \frac{۱۷}{۴۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشت ـ آهنگ لحظه‌ای) (آسان)

۶- گزینه «۱» ـ به کمک اتحاد مثلثاتی $\tan(\frac{\pi}{۴} - \alpha) = \frac{۱ - \tan\alpha}{۱ + \tan\alpha}$ داریم:

$$y = \frac{۱ - \tan(\frac{\pi}{۴} - x)}{۱ + \tan(\frac{\pi}{۴} + x)} = \tan(\frac{\pi}{۴} - (\frac{\pi}{۴} - x)) = \tan x \Rightarrow y' = ۱ + \tan^۲ x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴}) = ۱ + ۱ = ۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق مثلثاتی) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ f و g بر هم در نقطه‌ای به طول ۱ مماس‌اند، پس:

$$f(۱) = g(۱) \Rightarrow \frac{a+b}{۴} = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$f'(x) = \frac{۲ax + b}{۴} , g'(x) = ۳x^۲$$

$$f'(۱) = g'(۱) \Rightarrow \frac{۲a+b}{۴} = ۳ \Rightarrow ۲a + b = ۱۲ \xrightarrow{a=-b} a = ۱۲ , b = -۱۲$$

$$\Rightarrow f(x) = ۳(x^۲ - x) \Rightarrow f(۲) = ۳(۴ - ۲) = ۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ خط مماس) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۲a-۲=۲ \Rightarrow a=-۲$$

در همسایگی راست $x=۲$ داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'_+(۲)=\frac{۱}{۴}$$

در همسایگی چپ $x=۲$ داریم:

$$f(x)=-۲[-x]-x=-۲\times(-۲)-x \Rightarrow f'(x)=-۱ \Rightarrow f'_-(۲)=-۱$$

$$af'_+(۲)f'_-(۲)=-۲\times\frac{۱}{۴}\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۹- گزینه «۱» ـ برای آن‌که تابع $f(x)=(x^۲+bx+a)\times\frac{۱}{۲x+[-x]}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، باید معادله $x^۲+bx+a=۰$ ریشه مضاعف $x=۲$ داشته باشد.

$$(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴ \Rightarrow \begin{cases} b=-۴ \\ a=۴ \end{cases} \Rightarrow a+b^۲ \Rightarrow ۴+۱۶=۲۰$$

(نصیری) (دوازدهم) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ مشتق‌پذیری براکت‌ها) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» ـ

$$y'=۲x^۲+۲x\sin x+(x^۲-۲)\cos x+۲(\cos x-x\sin x)$$
$$y'=۲x^۲+۲x\sin x+x^۲\cos x-۲\cos x+۲\cos x-۲x\sin x$$
$$y'=۲x^۲+x^۲\cos x=(۲+\cos x)x^۲\geq ۰$$

چون $y'\geq ۰$ است، پس تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» ـ دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: اگر $a=۰$ شود، تابع f یک تابع درجه دوم است که همواره یک نقطه بحرانی دارد.

حالت دوم: معادله $f'(x)=۰$ فقط ریشه مضاعف داشته باشد.

$$f'(x)=۳ax^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۴-۱۲a=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{x}+\frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۴(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

تابع چهار نقطه بحرانی $\{-۱,۰,۱,۸\}$ دارد، پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۸ است.

x	−۱	۰	۱	۸
f(x)	۵	۰	−۳	۸

برای محاسبه اکسترمم‌های نسبی، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.

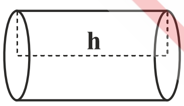
x	−۱		۰		۱		۸
f'(x)		−	ت ن	−	۰	+	

در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.

$$f(۸)-f(۱)=۸-(-۳)=۱۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد ـ اکسترمم نسبی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴» ـ طول نقطه B را x فرض می‌کنیم، آن‌گاه $B(x,\sqrt{۱-x^۲})$ خواهد شد، پس از دوران داریم:



$$V=\pi r^۲h=\pi(۱-x^۲)(۲x)=۲\pi(x-x^۳)$$

$$V'=۲\pi(۱-۳x^۲)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$V_{max}=۲\pi\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱-\frac{۱}{۳})=۲\pi\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد ـ بهینه سازی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» ـ ریشه زیر رادیکال طول نقطه بحرانی است.

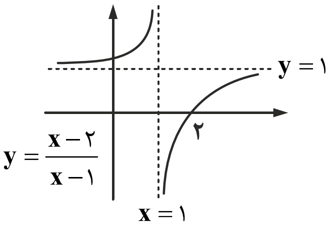
$$x-a=۰ \xrightarrow{x=۳} ۳-a=۰ \Rightarrow a=۳$$

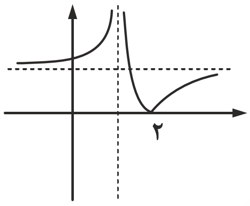
نقطه A یکی از نقاط تابع است.

$$-۱=\sqrt[۳]{۳-۳}+۳+b \Rightarrow b=-۴ \Rightarrow a+b=-۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقاط بحرانی) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» ـ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



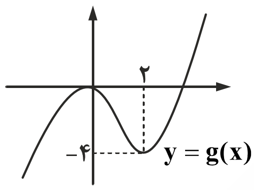


با توجه به نمودار تقعر تابع در $x=۲$ عوض می‌شود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ تقعر) (متوسط)

۱۶- گزینه «۳» ـ فرض می‌کنیم $g(x)=x^۳-۳x^۲$ باشد:

$$g'(x)=۳x^۲-۶x=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,x=۲$$

x		۰		۲	
y'	+	۰	−	۰	+

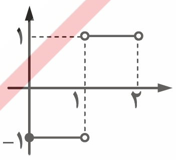


اگر نمودار تابع g را بیش از چهار واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه $f(x)$ محور xها را فقط در یک نقطه با طول منفی قطع خواهد کرد، پس:

$$k-۱>۴ \Rightarrow k>۵$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ رسم تابع درجه سوم) (دشوار)

۱۷- گزینه «۳» ـ تابع در $x=۰$ پیوستگی راست دارد، اما در $x=۲$ پیوستگی چپ ندارد و همچنین در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.



$$۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=-x+۱ \Rightarrow f'(x)=-۱$$
$$۱<x<۲ \Rightarrow f(x)=x-۱+۱ \Rightarrow f'(x)=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق پایه دوازدهم ـ نمودار مشتق) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ تابع $f(x)=(x-۱)|x-۱|$ در $x=۱$ بحرانی دارد، زیرا $f'(۱)=۰$ است و $x=۱$ نقطه عطف نیز است.

تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ در $x=۱$ بحرانی دارد، زیرا $g'(۱)=۰$ است و همچنین $x=۱$ عطف تابع است.

تابع $h(x)=x+\sqrt[۳]{x-۲}$ در $x=۲$ عطف قائم دارد و همچنین $h'(۲)=+\infty$ است، پس $x=۲$ بحرانی است.

تابع $m(x)=x^۳+x$ در مبدأ مختصات عطف دارد، اما $m'(۰)=۱$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ مشتق ـ عطف) (آسان)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$y=۲x^۳-۳x^۲-k \Rightarrow y'=۶x^۲-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-k \\ x=۱ \Rightarrow y=-۱-k \end{cases}$$

پس اکسترمم‌های نسبی $A(۰\,,-k)$ و $B(۱\,,-۱-k)$ می‌باشد.

$$|AB|=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۱-k+k)^۲}=\sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم‌های نسبی) (آسان)

۲۰- گزینه «۲» ـ نقاط روی سهمی را $M(x\,,x^{2}+4)$ در نظر می‌گیریم و فاصله آن‌ها را از خط $x-y=0$ محاسبه و مینیمم می‌کنیم.

$$|MH|=\frac{|x-x^{2}-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{2}-x+4)=\min$$

در نقطه $x=\frac{1}{2}$ عبارت موردنظر مینیمم می‌شود.

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow |MH|=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4)=\frac{15}{4\sqrt{2}}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه سازی) (دشوار)