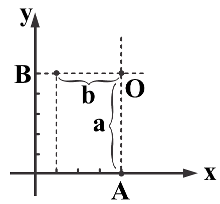
هندسه

۱- گزینه «۲» ـ ابتدا تناسب داده شده را ساده می‌کنیم:

$$MA + ۵MB = ۴MB + ۱۲ \Rightarrow MA + MB = ۱۲$$

چون $MA + MB > AB$ پس مکان هندسی نقطه M یک بیضی است و در این بیضی طول قطر بزرگ که همان بیشترین فاصله نقطه‌های روی مکان هندسی است برابر $۲a = ۱۲$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ تعریف اولیه بیضی)

۲- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل استفاده می‌کنیم. از شکل به سادگی به‌دست می‌آید $O = (۴ , ۵)$.



یعنی:

$$a = ۵ \quad , \quad b = ۳$$

از رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ به‌دست می‌آید:

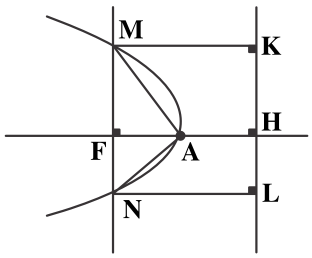
$$c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

در نهایت می‌نویسیم:

$$\text{خروج از مرکز بیضی} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ خروج از مرکز)

۳- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.



خط هادی

۱) چون M روی سهمی است، پس:

$$MF = MK$$

از طرف دیگر $MK = FH$ در نتیجه:

$$MF = FH$$

می‌دانیم $FH = ۲a$ پس $MF = ۲a$.

با استدلالی مشابه به‌دست می‌آید $NF = ۲a$. در نهایت $MN = ۴a$.

۲) برای محاسبه مساحت مثلث AMN می‌نویسیم:

$$S_{MAN} = \frac{۱}{۲}MN \times AF = \frac{۱}{۲} \times ۴a \times a = ۲a^۲$$

۳) معادله سهمی را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱)$$

یعنی $۴a = ۸$ یا $a = ۲$.

۴) اکنون از نتایج (۲) و (۳) به‌دست می‌آید.

$$S_{MAN} = ۲ \times ۴ = ۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ سهمی ـ مفاهیم اولیه)

۴- گزینه «۳» ـ ۱) بنابر ویژگی بازتابندگی سهمی می‌دانیم هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کـانون سـهمی خواهـد گذشت. چون محور این سهمی عمود بر محور xها است (از توان دوی x این موضوع را فهمیدیم) پس بازتاب همه پرتوی نـور بـه معادلـه $x = k$ از کـانون سهمی می‌گذرد. یعنی در این سهمی:

$F = (2, 5) =$ مختصات کانون

۲) معادله سهمی را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 4 = 16y - m + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 16\left(y - \frac{m-4}{16}\right)$$

۳) معادله فوق یک سهمی با رأس $A\left(h = 2, k = \frac{m-4}{16}\right)$ است که دهانه آن رو به بالا است. به‌دست می‌آید:

$$4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

و بنابراین:

$$F(h, k+a) = \left(2, \frac{m-4}{16} + 4\right)$$

۴) از «۱» و «۲» نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{m-4}{16} + 4 = 5 \Rightarrow \frac{m-4}{16} = 1 \Rightarrow m = 20$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ سهمی ـ ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها)

۵- گزینه «۲» ـ بنابر جدول صفحه ۶۴ کتاب درسی اگر نقطه $A = (x, y, z)$ در ناحیه ششم باشد $x < 0$، $y > 0$ و $z < 0$. در بین گزینه‌هـا فقـط گزینه «۲» این ویژگی را دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ معرفی فضا)

۶- گزینه «۱» ـ به‌دست می‌آید:

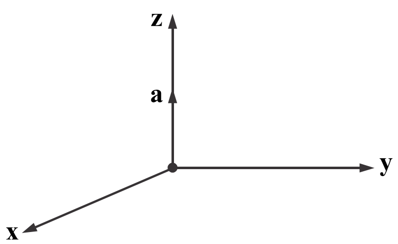
$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(\vec{i} - \vec{j}) - (2\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{i} + \vec{j} = -\vec{j}$$

و بنابراین:

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بردارها در $\mathbb{R}^2$ و طول بردار)

۷- گزینه «۲» ـ دربرداری که عمود بر صفحه xoy است مؤلفه‌های x و y برابر صفر است. (شکل را ببینید). اکنون به‌دست می‌آید:



$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ 2m + n - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

و بنابراین:

$$\vec{a} = (0, 0, -2)$$

در نهایت می‌نویسیم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{0 + 0 + (-2)^2} = 2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بردارها در $\mathbb{R}^3$)

۸- گزینه «۴» ـ از $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ نتیجه می‌گیریم:

$$|\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

به‌دست می‌آید:

$$|\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}|^2 = 4 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} = 4$$

$$\Rightarrow 9 + 16 + 1 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} = 4 \Rightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}) = -22$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} = -11$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی ـ ویژگی‌ها)

۹- گزینه «۲» ـ ۱) اگر $\vec{a'}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، می‌دانیم:

$$\vec{a'} = (\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲})\vec{b}$$

و بنابراین:

$$|\vec{a'}| = |(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲})\vec{b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^۲}|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

۲) از برابری $(۲\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = ۵$ به‌دست می‌آید:

$$۲|\vec{a}|^۲ + ۲\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - |\vec{b}|^۲ = ۵$$

$$\Rightarrow ۲|\vec{a}|^۲ + \vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^۲ = ۵ \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=۱} ۲+\vec{a}\cdot\vec{b}-۱ = ۵ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ۴$$

۳) اکنون از نتایج «۱» و «۲» به‌دست می‌آید:

$$|\vec{a'}| = \frac{۴}{۱} = ۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$)

۱۰- گزینه «۴» ـ ۱) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} = (۲x, y, ۲\sqrt{۲}z) \ ، \ \vec{b} = (\sqrt{۳}, -۲, \sqrt{۲})$$

۲) بنابر نامساوی کشی شوارتز $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$. اکنون برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در (۱) تعریف کردیم به‌دست می‌آید:

$$|۲\sqrt{۳}x - ۲y + ۴z| \le \sqrt{۴x^۲+y^۲+۸z^۲}\times\sqrt{۳+۴+۲} \Rightarrow (۲\sqrt{۳}x-۲y+۴z)^۲ \le ۹(۴x^۲+y^۲+۸z^۲)$$

۳) بنابر فرض مسئله $۲\sqrt{۳}x - ۲y + ۴z = ۶$. اکنون نتیجه به‌دست آمده در (۲) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$۶^۲ \le ۹(۴x^۲+y^۲+۸z^۲) \Rightarrow ۴ \le ۴x^۲+y^۲+۸z^۲$$

یعنی کمترین مقدار $۴x^۲+y^۲+۸z^۲$ برابر ۴ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ نامساوی کشی شوارتز)

۱۱- گزینه «۱» ـ ۱) مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ایجاد می‌شود برابر $\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$ است:

$$\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}| = ۲۱ \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ۴۲ \xrightarrow[|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta]{|\vec{a}|=۶\ ,\ |\vec{b}|=۱۴} \underset{\text{(زاویه بین دو بردار است } \theta)}{۶\times۱۴\times\sin\theta = ۴۲} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲}$$

۲) چون $\cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}$ و $۰ \le \theta < ۹۰^\circ$ پس:

$$\cos\theta = \sqrt{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳) در نهایت می‌نویسیم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۶\times۱۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴۲\sqrt{۳}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب خارجی ـ کاربرد در مساحت)

۱۲- گزینه «۲» ــ ۱) می‌دانیم:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad ، \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad ، \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

۲) اکنون به‌دست می‌آید:

$$((\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j})\times\vec{k}=(\vec{k}\times\vec{j})\times\vec{k}=(-\vec{i})\times\vec{k}=\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

و

$$\vec{j}\times(\vec{i}-\vec{k})=\vec{j}\times\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k}=-\mathbf{k}-\mathbf{i}$$

۳) از نتایج به‌دست آمده در (۲) می‌نویسیم:

$$((\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j})\times\vec{k}-\vec{j}\times(\vec{i}-\vec{k})-\vec{j}=\vec{j}+\vec{k}+\vec{i}-\vec{j}=\vec{i}+\vec{k}$$

۴) در نهایت طول بردار داده شده به‌دست می‌آید:

طول بردار داده شده $=|\vec{i}+\vec{k}|=\sqrt{۲}$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ درس دوم ــ خواص ضرب خارجی)

۱۳- گزینه «۳» ــ برای این منظور کافی است $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم و مقدار آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} ۱ & m & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & m & -۲ \end{vmatrix}=۱(۲+۱m)-m(-۴-۲)+(۲m+۲)=۶m+۳=۰ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ درس دوم ــ هم‌صفحه بودن سه بردار (ضرب خارجی))