هندسه

۱- گزینه «۴» ـ ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$۴(x^۲-۳x)=-۸y-۱\Rightarrow ۴(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴})=-۸y-۱+۹\Rightarrow ۴(x-\frac{۳}{۲})^۲=-۸(y-۱)\Rightarrow ۴(x-\frac{۳}{۲})^۲=-۸(y-۱)$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^۲=-۲(y-۱)$$

اکنون می‌توان نوشت:

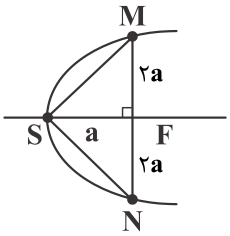
$$F=\left|\begin{array}{l}k=\frac{۳}{۲}\\ h-a=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right.$$

در نتیجه:

$$\text{مجموع مؤلفه‌های کانون}=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ سهمی)

۲- گزینه «۲» ـ به سهمی مقابل نگاه کنید (توجه کنید که این سهمی لزوماً سهمی طرح شده در مسئله نیست) به دست می‌آید:



$$S_{SMN}=\frac{۱}{۲}\times ۴a\times a=۲a^۲\quad (۱)$$

از طرف دیگر فاصله F تا خط هادی برابر $۲a$ است، پس:

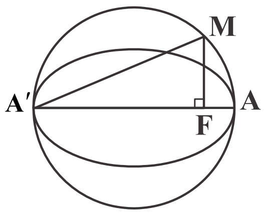
$$۲a=۲\Rightarrow a=۱$$

اکنون بنابر رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$S_{SMN}=۲\times ۱=۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ سهمی)

۳- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $MF=b$ و $A'F=a+C$. در مثلث قائم‌الزاویه $A'F=M$، بنابر قضیه فیثاغورس:



$$MA'=\sqrt{MF^۲+FA'^۲}=\sqrt{۶^۲+(a+c)^۲}\quad (۱)$$

بنابر فرض مسئله $۲a=۱۰$ و $۲b=۸$، یعنی $a=۵$ و $b=۴$، در نتیجه:

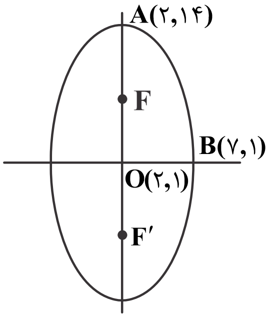
$$c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$$

اکنون از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$MA'=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی)

۴- گزینه «۴» ـ با توجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطه $A(۲,۱۴)$ یک سر قطر بزرگ و نقطه $B(۷,۱)$ یک سر قطر کوچک بیضی است، بنابراین:



$$a=OA=۱۳,b=OB=۵$$

در نتیجه:

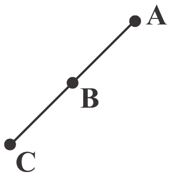
$$c=\sqrt{a^۲-b^۲}=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$$

بنابراین کانون‌های بیضی به صورت زیر هستند:

$$F=\left|\begin{array}{l}۲\\ ۱+۱۲\end{array}\right.=\left|\begin{array}{l}۲\\ ۱۳\end{array}\right.,F'=\left|\begin{array}{l}۲\\ ۱-۱۲\end{array}\right.=\left|\begin{array}{l}۲\\ -۱۱\end{array}\right.$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی)

۵- گزینه «۲» ـ ابتدا قرینه A را نسبت به B به دست می‌آوریم و آن را C می‌نامیم:



$$B=\frac{A+C}{۲}\Rightarrow C=۲B-A=۲(۲,۱,-۱)-(۱,-۱,۳)=(۳,۳,-۵)$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\text{فاصله } C \text{ از محور } x\text{ها}=\sqrt{۳^۲+(-۵)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مختصات نقطه در فضا)

۶- گزینه «۳» ـ ابتدا بردار $۲\vec{a}+۳\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

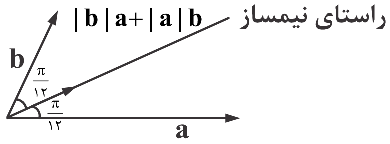
$$۲\vec{a}+۳\vec{b}=۲(۴,-۲,-۱)+۳(-۱,۳,۰)=(۵,۵,-۲)$$

اکنون به دست می‌آید:

$$|۲\vec{a}+۳\vec{b}|=\sqrt{۵^۲+۵^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۵۴}=۳\sqrt{۶}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بردار و اندازه بردار)

۷- گزینه «۴» ـ توجه کنید که $|b|a+|a|b$ راستای نیمساز زاویه بین دو بردار a و b را نشان می‌دهد، پس زاویه بردار a و $|b|a+|a|b$ برابر $\frac{\pi}{۱۲}$ است.



(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بردار ـ راستای نیمساز)

۸- گزینه «۳» ـ عبارت $a\cdot(۳b-a)$ را ساده می‌کنیم:

$$a\cdot(۳b-a)=۳a\cdot b-a\cdot a=۳a\cdot b-|a|^۲\quad (۱)$$

به دست می‌آید $|a|=\sqrt{۱+۱+۲}=۲$. اکنون بنابر رابطه (۱) می‌توان نوشت:

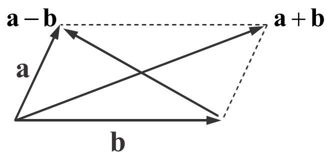
$$a\cdot(۳b-a)=۳\times(-۳)-۲^۲=-۹-۴=-۱۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی)

۹- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر فرض مسئله طول دو قطر برابر ۱ و ۳ است؛ یعنی:

$$(|a+b|=۱,|a-b|=۳)\ \text{یا}\ (|a+b|=۳,|a-b|=۱)$$

می‌دانیم $|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a\cdot b$، در نتیجه:



$$\begin{cases}۱-۹=۴a\cdot b\\ \text{یا}\\ ۹-۱=۴a\cdot b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot b=-۲\\ a\cdot b=۲\end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب داخلی ـ اتحادها در ضرب داخلی)

۱۰- گزینه «۲» ـ دو بردار $u=(۱,-۲,۳)$ و $v=(x,y,z)$ را در نامساوی کوشی شوارتز قرار می‌دهیم:

$$|u\cdot v|\le|u||v|\Rightarrow|x-۲y+۳z|\le\sqrt{۱۴}\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\Rightarrow ۲۸\le\sqrt{۱۴}\times\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}۲۸^۲\le۱۴(x^۲+y^۲+z^۲)\Rightarrow ۵۶\le x^۲+y^۲+z^۲$$

یعنی کمترین مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ برابر ۵۶ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ نامساوی کوشی شوارتز)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض کنید $\vec{a}'$ تصویر $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ است. چون $|\vec{a}|=\sqrt{۱۴}$ و بنابر فرض $|\vec{a}'|=\sqrt{۱۴}$. اکنون از برابری $|\vec{a}|=|\vec{a}'|$ نتیجه می‌گیریم $\vec{a}\parallel\vec{b}$، در نتیجه:

$$\frac{۲}{۱}=\frac{m-۱}{۲}=\frac{n+۲}{-۳}\Rightarrow\begin{cases}m=۵\\n=-۸\end{cases}$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$m+n=۵+(-۸)=-۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ تصویر قائم بردار بر بردار دیگر)

۱۲- گزینه «۳» ـ ابتدا می‌نویسیم:

$$(m,۲,m)\times(۳,m,\circ)=\begin{vmatrix}i & j & k\\ m & ۲ & m\\ ۳ & m & \circ\end{vmatrix}=-m^۲i+۳mj+(m^۲-۶)k$$

چون $|(m,۲,m)\times(۳,m,\circ)|=\sqrt{۳۵}$، پس:

$$\sqrt{m^۴+۹m^۲+(m^۲-۶)^۲}=\sqrt{۳۵}\xrightarrow[\text{می رسانیم.}]{\text{به توان ۲}}۲m^۴-۳m^۲+۱=\circ\Rightarrow(m^۲-۱)(۲m^۲-۱)=\circ\Rightarrow\begin{cases}m^۲-۱=\circ\\۲m^۲-۱=\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\pm۱\\m=\pm\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

یعنی چهار مقدار برای m به دست می‌آید. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب خارجی ـ محاسبه)

۱۳- گزینه «۱» ـ اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۴\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۴\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{۱}{۲}=۴\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|=۸$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|}_{۸}\cos\theta=۸\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-۴\sqrt{۳}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ ضرب خارجی ـ ویژگی‌ها)

۱۴- گزینه «۳» ـ مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده روی دو بردار $\vec{a}+۳\vec{b}$ و $۲\vec{a}+۵\vec{b}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S=|(\vec{a}+۳\vec{b})\times(۲\vec{a}+۵\vec{b})|=|\underbrace{۲\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{O}}+۵\vec{a}\times\vec{b}+۶\vec{b}\times\vec{a}+۱۵\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{O}}|=|۵\vec{a}\times\vec{b}-۶\vec{a}\times\vec{b}|=|-\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

مقدار $|\vec{a}\times\vec{b}|$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۱ & -۲ & ۳\\ ۲ & \circ & ۱\end{vmatrix}=-۲i+۵j+۴k\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=۳\sqrt{۵}$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=۳\sqrt{۵}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ کاربرد ضرب خارجی)