هندسه

۱- گزینه «۲» ـ در سطر اول از عدد ۳ و در سطر دوم از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم:

$$۶\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & a \\ ۱ & b & ۱ \\ c & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۲ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & a \\ ۱ & b & ۱ \\ c & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۲$$

اکنون دترمینان را با بسط حول سطر اول به‌دست می‌آوریم:

$$۱(b-۱)-(۱-c)+a(۱-bc)=-۲$$
$$b-۱-۱+c+a-abc=-۲$$
$$a+b+c-abc=۰$$
$$\frac{a+b+c}{abc}=۱$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دترمینان) (متوسط)

۲- گزینه «۳» ـ دو طرف برابری را از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$AB=BC \xrightarrow{\times B^{-۱}} A=BCB^{-۱}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$A^{۱۰}=BC\underbrace{B^{-۱}B}_{I}C\underbrace{B^{-۱}..}_{I}\underbrace{.B}_{I}CB^{-۱}=BC^{۱۰}B^{-۱}$$

$$\text{نکته}: (PAP^{-۱})^n=PA^nP^{-۱}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ وارون ماتریس) (دشوار)

۳- گزینه «۴» ـ چون $A^۲=A$، پس هرتوانی از A برابر A است:

$$A^۳=A$$

از طرف دیگر $B=۲A-I$، در نتیجه:

$$B^۳=۸A^۳-۱۲A^۲+۶A-I=۸A-۱۲A+۶A-I=۲A-I=B$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$A^۳+B^۳=A+B$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ضرب ماتریس‌ها) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ شرط بی‌شمار جواب داشتن دستگاه را می‌نویسیم:

$$\frac{m-۵}{۲}=\frac{۷}{m}=\frac{۳}{m-۴} \Rightarrow m^۲-۵m=۱۴ \Rightarrow m^۲-۵m-۱۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۷ \\ m=-۲ \end{cases}$$

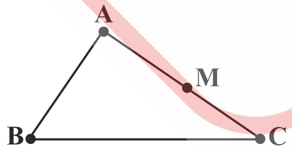
اکنون به ازای این دو مقدار شرط برابری نسبت‌های دوم و سوم را بررسی می‌کنیم:

$$m=۷ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۷}{m}=۱ \\ \frac{۳}{m-۴}=۱ \end{cases} \checkmark$$

$$m=-۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۷}{m}=-\frac{۷}{۲} \\ \frac{۳}{m-۴}=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \times$$

بنابراین تنها به ازای $m=۷$ بی‌شمار جواب دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ دستگاه معادلات) (آسان)

۵- گزینه «۱» ـ چون M وسط ضلع AC است، پس ثابت $AM=\frac{۱}{۲}AC$؛ یعنی فاصله M از نقطه ثابت A به فاصله ثابت $\frac{۱}{۲}AC$ قرار دارد، بنابراین مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز A و شعاع $\frac{۱}{۲}AC$ است.



(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مکان هندسی) (آسان)

۶- گزینه «۳» ـ باید نقطه $A(۱,m)$ خارج دایره باشد، پس $OA > R$:

$$x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases}O(۱,۳)\\ R=\sqrt{۱+۹-۶}=۲\end{cases}$$

$$OA>R \Rightarrow \sqrt{۰+(m-۳)^۲}>۲ \Rightarrow |m-۳|>۲ \Rightarrow \begin{cases} m-۳>۲\\ m-۳<-۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m>۵\\ m<۱\end{cases}$$

چون m عدد طبیعی یک رقمی است، پس:

$$m\in\{۶,۷,۸,۹\}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۲ ـ وضع نقطه و دایره) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲-۶x+۴y+۴=۰ \Rightarrow O'(۳,-۲),\ R'=\sqrt{۹+۴-۴}=۳$$

می‌دانیم در دو دایره مماس داخل $OO'=|R-R'|$، بنابراین:

$$\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱+۲)^۲}=|R-۳| \Rightarrow ۵=|R-۳| \Rightarrow \begin{cases}R-۳=۵\\ R-۳=-۵\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}R=۸\\ R=-۲ \ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۲ ـ وضع دو دایره) (دشوار)

۸- گزینه «۳» ـ بیش‌ترین مساحت مثلث FBF' است، چون بزرگ‌ترین ارتفاع را دارد. معادله دایره به‌صورت زیر است:

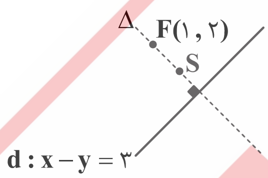
$$(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۳ \Rightarrow \begin{cases}W(-۱,۲)\\ R=\sqrt{۳}=c\end{cases}$$

طبق فرض $b=\sqrt{۲}$. اکنون می‌توان نوشت:

$$S_{BFF'}=\frac{۱}{۲}\times b\times ۲c=bc=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۳ ـ بیضی) (متوسط)

۹- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. خط Δ محور تقارن سهمی خطی است که از F می‌گذرد و بر d عمود است. معادله خط Δ را می‌نویسیم:

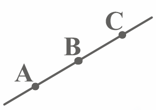


$$\left.\begin{array}{r} m_d=۱\Rightarrow m_\Delta=-۱\\ \Delta \ \text{روی} \ F(۱,۲)\end{array}\right\}\Rightarrow x+y=۳$$

واضح است که چون S روی Δ است، پس مجموع مختصات S هم برابر ۳ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۳ ـ سهمی) (آسان)

۱۰- گزینه «۲» ـ اگر سه نقطه هم خط باشند، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ موازی هستند.



$$\overrightarrow{AB}=B-A=(۱-m,-۱-n,۳)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(۱,۳,۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}\Rightarrow \frac{۱-m}{۱}=\frac{-۱-n}{۳}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \begin{cases}m=-\frac{۱}{۲}\\ n=-\frac{۱۱}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه $m+n=-۶$. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۱ ـ توازی بردارها) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ـ از برابری داده شده به‌دست می‌آید:

$$a+b+c=-۲c$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)=۴|c|^۲ \Rightarrow ۹+۴+۱+۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)=۴ \Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-۵$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ ضرب داخلی) (آسان)

۱۲- گزینه «۳» ــ بزرگ‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین ضلع است:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{۶}\,,\ |\mathbf{b}| = \sqrt{۵}$$

یعنی باید ارتفاع وارد بر بردار b را به‌دست آوریم:

$$S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{matrix}\right\| = |(-۱\,,۲\,,۰)| = \sqrt{۵}$$

$$S = |\mathbf{b}|h \Rightarrow \sqrt{۵} = \sqrt{۵}h \Rightarrow h = ۱$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ درس ۲ ــ ضرب خارجی ــ مساحت) (متوسط)