گسسته

۱- گزینه «۴» ـ ۱) می‌دانیم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ پس:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۲۵}{۶+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۲۵}{۷} \right\rceil = ۴$$

اما دقت کنید که برای احاطه شدنِ هر ۵ ضلعی ۲ رأس باید انتخاب شود. در نتیجه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برابر $۱۰ = ۵ \times ۲$ است. در زیر یکی از این مجموعه‌های احاطه‌گر می‌نیمم را می‌نویسیم:

$$\{a, c, f, h, m, p, r, u, w\}$$

بنابراین $\gamma(G) = ۱۰$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ عدد احاطه‌گری)

۲- گزینه «۱» ـ ۱) اندازه گراف کامل از مرتبه ۱۰ برابر $\binom{۱۰}{۲} = ۴۵$ است. پس این گراف با حذف یک یال از گراف $K_{۱۰}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه در این گراف هشت رأس درجه ۹ و دو رأس درجه ۸ وجود دارد.

۲) در گراف با p رأس هر رأس با درجه $p-۱$ (اگر وجود داشته باشد) به تنهایی می‌تواند تمام رأس‌ها را احاطه کند و مجموعه تک‌عنصری شامل آن رأس یک $\gamma-$ مجموعه است.

۳) از بحث (۱) به‌دست آمد که گرافِ موردِ بحث دارای هشت رأس درجه $p-۱ = ۱۰-۱ = ۹$ است یعنی ۸ مجموعه احاطه‌گر یک عنصری یا همان $\gamma-$ مجموعه دارد. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ $\gamma-$ مجموعه)

۳- گزینه «۴» ـ ۱) فرض کنید مجموعه D یک احاطه‌گر مینیمال از گراف داده شده باشد. اگر $a \in D$ آن‌گاه $b, c \notin D$ چون در صورت وجود c یا b می‌توانیم آن را حذف کنیم و همچنان یک مجموعه احاطه‌گر داشته باشیم و همچنین $a \notin D$ باید b و c با هم در D باشند چون مثلاً اگر c عنصر D نباشد در این صورت c توسط D احاطه نمی‌شود. همین استدلال را می‌توان برای قسمتی از گراف که شامل d، e و f است هم بیان کرد.

۲) در قسمتی از گراف که شامل g و h است فقط یکی از رأس‌های g یا h باید در D باشد. همین استدلال را می‌توان برای بخشی از گراف که شامل دو رأس i و j است به کار برد.

۳) با توجه به توضیحاتِ بیان شده می‌توان مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال را به شکل‌های زیر نوشت:

نوع ۱ نمونه: $D_۱ = \{a, d, g, i\} \Rightarrow K_۱ = ۴$

نوع ۲ نمونه: $D_۲ = \{a, e, f, g, i\} \Rightarrow K_۲ = ۵$

نوع ۳ نمونه: $D_۳ = \{b, c, e, f, g, i\} \Rightarrow K_۳ = ۶$

در نهایت می‌نویسیم:

مجموع مقادیر متمایز K = $۴+۵+۶ = ۱۵$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموعه احاطه‌گر مینیمال)

۴- گزینه «۳» ـ در تمرین ۵ صفحه ۵۳ کتاب درسی دیدیم عدد احاطه‌گری گراف p_n برابر $\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ است. اکنون به‌دست می‌آید:

$$\gamma(P_{۱۰}) = \left\lceil \frac{۱۰}{۳} \right\rceil = ۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ عدد احاطه‌گری)

۵- گزینه «۴» ـ ۱) ابتدا ۶ کتاب گسسته یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم. چون این کتاب‌ها یکسان هستند پس نیازی به محاسبه جایگشت آن‌ها نیست و فقط یک حالت دارد.

$$-g-g-g-g-g-g-$$

۲) ۷ فضایِ مشخص شده بین آن‌ها و در اول و آخر را در نظر بگیرید. ۴ تا از آن‌ها را برای قرار دادنِ کتاب‌های فیزیک انتخاب می‌کنیم (دقت کنید که دراین انتخاب کتاب‌های فیزیک کنار هم قرار نمی‌گیرند و شرایط مسئله برآورده می‌شود). تعداد حالت‌های این کار برابر $\binom{۷}{۴}$ است.

۳) چون کتاب‌های فیزیک متمایز هستند باید جایگشت آن‌ها را هم در نظر گرفت که می‌شود $۴!$.

۴) در نهایت می‌توان جواب را به شکل زیر به‌دست آورد.

$$۱\times\binom{۷}{۴}\times ۴! = ۸۴۰$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ یادآوری آنالیز ترکیبی)

۶- گزینه «۲» ـ ۱) چون $۵x_۱$، $۵x_۲$ و ۴۰ هر سه مضرب ۵ هستند پس $x_۲$ هم باید مضرب ۵ باشد. فرض می‌کنیم $x_۲ = ۵x'_۲$. معادله را به شکل زیر می‌نویسیم و تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$۵x_۱ + ۵x'_۲ + ۵x_۳ = ۴۰ \Rightarrow x_۱ + x'_۲ + x_۳ = ۸$$

۲) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.

۳) اکنون از (۱) و (۲) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\binom{۸+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حل معادله ـ جایگشت با تکرار)

۷- گزینه «۴» ـ ابتدا عددهای ۳، ۳، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ را به $\frac{۷!}{۲!۴!}$ طریق در یک ردیف می‌نویسیم.

$$\Delta \bullet \Delta \bullet \Delta \bullet \Delta \bullet \Delta \bullet \Delta \bullet \Delta \bullet \Delta$$

بین این ارقام و ابتدا و انتهای آن‌ها ۸ فضا ایجاد می‌شود.

به $\binom{۸}{۴}$ طریق می‌توانیم چهار رقم ۴ را در چهار تا از هشت فضای ایجاد شده قرار دهیم. بنابراین پاسخ برابر

$$\binom{۸}{۴}\times\frac{۷!}{۲!۴!}$$

است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شمارش با تکرار)

۸- گزینه «۴» ـ مربع لاتین را کامل می‌کنیم (دقت کنید که در هیچ سطر و در هیچ ستونی نباید عدد تکراری باشد).

۲	1	۳	۴
۴	۳	۱	2
3	۴	۲	۱
1	۲	4	۳

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ z = ۱ \\ y = ۲ \end{cases}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مربع لاتین)

۹- گزینه «۲» ـ باید عددهایی را به‌دست آوریم که عامل ۵ یا ۱۳ نداشته باشند. فرض کنید:

A: عددهای کوچک‌تر از ۱۰۰۰ که عامل ۵ دارد.

B: عددهای کوچک‌تر از ۱۰۰۰ که عامل ۱۳ دارد.

باید $|\overline{A} \cap \overline{B}|$ را به‌دست آوریم. می‌نویسیم

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |s| - |A \cup B| = |s| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= ۹۹۹ - ([\frac{۹۹۹}{۵}] + [\frac{۹۹۹}{۱۳}] - [\frac{۹۹۹}{۵ \times ۱۳}]) = ۹۹۹ - (۱۹۹ + ۷۶ - ۱۵) = ۷۳۹$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول)

۱۰- گزینه «۴» ـ روستاها را a، b، c و d می‌نامیم. دراین‌صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعداد گراف‌های ساده که با چهار رأس a، b، c و d می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آن‌ها هیچ رأسی تنها نباشد.

می‌نویسیم:

چهار روستا تنها بمانند + سه روستا تنها بمانند − دو روستا تنها بمانند + یک روستا تنها بماند − تعداد کل حالت‌های جاده‌ها

$$= ۲^{\binom{۴}{۲}} - \binom{۴}{۱} \times ۲^۳ + \binom{۴}{۲} \times ۲ - \binom{۴}{۳} \times ۱ + \binom{۴}{۴} \times ۱ = ۶۴ - ۳۲ + ۱۲ - ۴ + ۱ = ۴۱$$

توضیح:

۱) یک روستا تنها بماند. به $\binom{۴}{۱}$ طریق رأسی را که می‌خواهیم تنها باشد را انتخاب می‌کنیم. بین ۳ رأس باقی‌مانده ۳ یال می‌تواند موجود باشد که هر کدام ۲ حالت دارند (بودن یا نبودن آن یال) که در مجموع می‌شود $۲^۳$. پس در کل می‌شود $۲^۳ \times \binom{۴}{۱}$.

* برای سایر حالت‌ها هم مشابه فوق استدلال می‌کنیم.

۲) جواب را این‌گونه به‌دست می‌آوریم: A_i مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای است که در آن‌ها روستای i تنها بماند. جواب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$|s| - |A_a \cup A_b \cup A_c \cup A_d|$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول ـ کاربرد)

۱۱- گزینه «۲» ـ می‌دانیم تعداد تابع‌هایی چون $f : A \to B$ با فرض $|A| = m \geq ۳$ و $|B| = ۳$ به‌طوری که $R_f = B$، از رابطه $۳^m - (۳ \times ۲^m - ۳)$ به‌دست می‌آید. اکنون به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد توابع} = ۳^۴ - (۳ \times ۲^۴ - ۳) = ۳۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل شمول و عدم شمول ـ تابع)

۱۲- گزینه «۲» ـ مجموعه داده شده را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$\{۳ , ۲۷\}$، $\{۴ , ۲۶\}$، $\{۵ , ۲۵\}$، $\{۶ , ۲۴\}$، ...، $\{۱۴ , ۱۶\}$، $\{۱۵\}$

۱۳ مجموعه به‌دست آمد که مجموع هر دو عضو مجموعه‌های ۲ عضوی برابر ۳۰ است. بنابراین اگر ۱۴ عدد از ۱۳ مجموعه بالا انتخاب کنیم، چون ۱۴ < ۱۳، بنابر اصل لانه کبوتر مجموعه‌ای در بین مجموعه‌های دو عضوی وجود دارد که هر دو عدد انتخاب شده‌اند. پس در بین این ۱۴ عدد، دو عدد با مجموع ۳۰ وجود دارد. (هویدی) (فصل سوم ـ درس دوم ـ اصل لانه‌کبوتر)