ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ می‌توان نوشت:

$$a^{۲}+a+۱\geq ۰ \Rightarrow a^{۲}+a+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\geq ۰ \Rightarrow (a+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}\geq ۰$$

در نتیجه $A=\frac{۳}{۴}$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ استدلال ـ اثبات بازگشتی) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ـ هر عدد خودش را عاد می‌کند، پس $۵n+۴\mid ۵n+۴$. اکنون می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۵n+۴\mid ۱۷n-۳ \\ ۵n+۴\mid ۵n+۴ \end{cases} \Rightarrow ۵n+۴\mid ۱۷(۵n+۴)-۵(۱۷n-۳) \Rightarrow ۵n+۴\mid ۸۳$$

چون مقسوم‌علیه‌های ۸۳ برابر ±۱ و ±۸۳ هستند، پس $۵n+۴$ را برابر تک‌تک این اعداد قرار می‌دهیم و در هر مورد مقدار صحیح n را در صورت وجود پیدا می‌کنیم، در نتیجه:

$$n=-\frac{۳}{۵},-۱,\frac{۷۹}{۵},-\frac{۸۷}{۵}$$

فقط $n=-۱$ قابل قبول است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ بخش‌پذیری) (متوسط)

۳- گزینه «۲» ـ نشان می‌دهیم گزینه «۲» درست است و گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» نادرست‌اند.

گزینه «۲»:

$$(a\in[۳۹]_{۶۰} \Rightarrow a\overset{۶۰}{\equiv}۳۹ \xrightarrow{۱۲\mid ۶۰} a\overset{۱۲}{\equiv}۳۹\overset{۱۲}{\equiv}۳۹-۳\times۱۲\overset{۱۲}{\equiv}۳ \Rightarrow a\overset{۱۲}{\equiv}۳ \Rightarrow a\in[۳]_{۱۲})$$

در نتیجه $[۳۹]_{۶۰}\subseteq[۳]_{۱۲}$.

گزینه «۱»: ابتدا توجه کنید که $[۵]_{۱۰}=[۲۵]_{۱۰}$ و $[۵]_{۲۰}=[۲۵]_{۲۰}$. چون $۱۵\in[۵]_{۱۰}$ و $۱۵\notin[۵]_{۲۰}$، پس $[۵]_{۲۰}\not\subseteq[۵]_{۱۰}$.

گزینه «۳»: ابتدا توجه کنید که $[۵]_{۳۰}=[۳۵]_{۳۰}$. چون $۵\in[۵]_{۳۰}$ و $۵\notin[۱۰]_{۱۵}$، پس $[۱۰]_{۱۵}\not\subseteq[۳۵]_{۳۰}$.

گزینه «۴»: ابتدا توجه کنید که $[۱۳]_{۳۰}=[۴۳]_{۳۰}$. چون $۱۳\in[۱۳]_{۳۰}$ و $۱۳\notin[۳]_{۲۰}$، پس $[۳]_{۲۰}\not\subseteq[۱۳]_{۳۰}$.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ کلاس هم‌نهشتی) (دشوار)

۴- گزینه «۴» ـ چون عبارت $(k+۱۳۹۹)\cdots(k+۱۳۹۵)$ حاصل‌ضرب ۵ عدد متوالی است، پس همواره هم عامل ۲ و هم عامل ۵ دارد، در نتیجه همواره به پیمانه ۱۰ با صفر هم‌نهشت است. از طرف دیگر چون $۱۴۰۰\overset{۴}{\equiv}۰$، پس $k^{۱۴۰۰}\overset{۱۰}{\equiv}k^{۴}$، در نتیجه عدد موردنظر در پیمانه ۱۰ برابر $k^{۴}$ است، بنابراین برای پیدا کردن رقم یکان عدد داده شده، کافی است فقط یکان $k^{۴}$ را به‌دست آوریم. می‌توان نوشت:

$$k\overset{۱۰}{\equiv}۰ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۰,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۱ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۲ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۶$$

$$k\overset{۱۰}{\equiv}۳ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۴ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۶,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۵ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۵$$

$$k\overset{۱۰}{\equiv}۶ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۶,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۷ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱,\ k\overset{۱۰}{\equiv}۸ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۶$$

$$k\overset{۱۰}{\equiv}۹ \Rightarrow k^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۹$$

در نتیجه بزرگ‌ترین رقم یکان ممکن عدد داده شده برابر ۶ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ پیدا کردن رقم یکان) (متوسط)

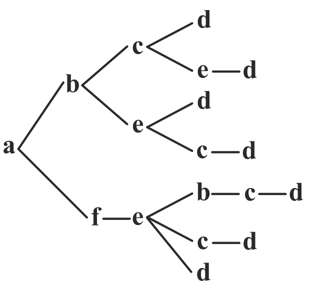
۵- گزینه «۲» ـ معادله سیاله $(۱۵+b)x+by=۲۰$ به شرطی جواب دارد که $(۱۵+b\,,b)\mid ۲۰$. به‌دست می‌آید $(۱۵+b\,,b)=(۱۵\,,b)$، پس باید $(۱۵\,,b)\mid ۲۰$ در بین گزینه‌ها فقط $b=۵$ در این رابطه صدق می‌کند. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله سیاله) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ یا هیچ‌یک از یال‌های ab، bc و cd را نباید انتخاب کنیم که در این حالت به $۲^۷$ طریق می‌توانیم گراف را تشکیل دهیم و یا یکی از این سه یال را باید انتخاب کنیم، که در این حالت به $\binom{۳}{۱}\times ۲^۷$ طریق می‌توانیم گراف را تشکیل دهیم، در نتیجه پاسخ برابر است با:

$$۲^۷ + \binom{۳}{۱}\times ۲^۷ = ۲^۷ + ۳\times ۲^۷ = ۴\times ۲^۷ = ۵۱۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ شمارش گراف) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ برای یافتن همه $a-d$ مسیرها در گراف داده شده از نمودار درختی استفاده می‌کنیم:



بنابراین تعداد $a-d$ مسیرها در گراف داده شده برابر ۷ است.

$(a,b,c,d), (a,b,c,e,d), (a,b,e,d), (a,b,e,c,d), (a,f,e,b,c,d), (a,f,e,c,d), (a,f,e,d)$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مسیر و دور) (آسان)

۸- گزینه «۱» ـ زمانی مجموعه $\{a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است که a به همه رأس‌های گراف وصل شود. برای هر دو تا از رأس‌های b، c و d دو انتخاب داریم که این دو رأس را به هم وصل کنیم یا نکنیم، در نتیجه تعداد گراف‌های مطلوب برابر $۸ = ۲^۳ = ۲^{\binom{۳}{۲}}$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۲ ـ مجموعه احاطه‌گر) (دشوار)

۹- گزینه «۴» ـ می‌دانیم:

مجموع درجات گراف کامل k_5 = مجموع درجات گراف $\bar{G}$ + مجموع درجات گراف G

۵×۴ = مجموع درجات رأس‌های $\bar{G}$ + ۲×۶

مجموع درجات رأس‌های $\bar{G}$ = $۲۰ - ۱۲ = ۸$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس ۱ ـ مکمل گراف) (آسان)

۱۰- گزینه «۱» ـ ابتدا ۵ صندلی را طوری انتخاب می‌کنیم که هیچ دو صندلی متوالی خالی نباشند، سپس ۵ نفر را به !۵ طریق در صندلی‌ها می‌نشانیم.

△ (پ) △ (پ) △ (پ) △ (پ) △ (پ) △

دقت کنید که ابتدا پنج صندلی پر را با (پ) نشان دادیم و فضاهای △ را برای صندلی‌های خالی در نظر می‌گیریم، بنابراین ۵ جایگاه از ۶ جایگاه مخصوص صندلی‌های خالی را انتخاب می‌کنیم، بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\binom{۶}{۵}\times ۵! = ۶\times ۵! = ۶!$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۱ ـ یادآوری ترکیبیات) (آسان)

۱۱- گزینه «۲» ـ تابع را f می‌نامیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f = \{(a,۱), (b, \underset{\text{۴ انتخاب}}{\underset{\downarrow}{-}}), (c, \underset{\text{۵ انتخاب}}{\underset{\downarrow}{-}})\}$$

بنابراین تعداد توابع برابر $۲۰ = ۵\times ۴$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ شمارش توابع) (آسان)

۱۲- گزینه «۴» ـ توجه کنید که چون عناصر روی قطر فرعی مربع لاتین همگی برای ۲ هستند. اگر بخواهیم مربع لاتین B با A متعامد باشد، باید عناصر روی این قطر آن متمایز باشند. به $۶ = !۳$ حالت می‌توانیم ۳ عدد متمایز ۱، ۲ و ۳ را در این ۳ جایگاه قرار دهیم که در هر کدام مربع لاتین به‌صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود. (سراسری ریاضی ـ ۹۸) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ مربع لاتین) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» ـ برای رقم یکان و رقم صدگان یک عدد پنج رقمی $10 \times 10 = 100$ حالت مختلف وجود دارد، پس برای این‌که مطمئن باشیم دست کم ۴ عدد پنج رقمی داریم که هم رقم یکان و هم رقم صدگان آن‌ها برابر است، حداقل به $100 \times 3 + 1 = 301$ عدد ۵ رقمی نیاز داریم.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس ۲ ـ اصل لانه کبوتری) (متوسط)