

۱- گزینه «۱» - $x^2 - \frac{9}{x^2}$ ، مربع x ، $\frac{3}{x}$ هستند، در نتیجه

$$A = x - \frac{3}{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} A^2 = \left(x^2 + \frac{9}{x^2} - 6\right) \Rightarrow A^2 = (31 - 6) = 25 \Rightarrow A = \pm 5$$

باتوجه به گزینه‌ها $A = 5$ می‌باشد $\Leftarrow x - \frac{3}{x} = 5$ (اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مربع)

۲- گزینه «۱» - تجزیه شده یک عبارت با خود آن عبارت برابر است. عبارت $(x-1)(2x+5)$ را باز می‌کنیم:

$$(x-1)(2x+5) = 2x^2 + 5x - 2x - 5 = 2x^2 + 3x - 5 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 2x^2 + 3x - 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow b - c = 8$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - تجزیه)

۳- گزینه «۱» - چون ضریب x منفی است پس با مربع تفاضل دو جمله‌ای سروکار داریم. با افزودن عددی مثل k به عبارت $9x^2 - 12x + \frac{1}{3}$ آن را به

صورت مربع تفاضل دو جمله‌ای یعنی $(a-b)^2$ در می‌آوریم.

$$9x^2 - 12x + \frac{1}{3} + k = (a-b)^2 \Rightarrow 9x^2 - 12x + \left(\frac{1}{3} + k\right) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 9x^2 = a^2 \Rightarrow a = 3x, \left(\frac{1}{3} + k\right) = b^2$$

$$2ab = 12x \xrightarrow{a=3x} 2(3x)b = 12x \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{3} + k \xrightarrow{b=2} 4 = \frac{1}{3} + k \Rightarrow k = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مربع)

۴- گزینه «۲» - عبارت زیر رادیکال با فرجه ۳، به شکل $a^2 - b^2$ است. برای ساده کردن آن از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$(504)^2 - (496)^2 = (504 + 496)(504 - 496) = 1000 \times 8 = 8000 \Rightarrow \sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{(20)^3} = 20$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مزدوج)

۵- گزینه «۲» - حاصل دو عبارت را با استفاده از اتحاد مربع به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}-1)^2 &= (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5})(1) + 1^2 = 6 - 2\sqrt{5} \\ (\sqrt{5}+1)^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(1) + 1^2 = 6 + 2\sqrt{5} \end{aligned} \xrightarrow{\text{تفاضل دو عبارت}} (6+2\sqrt{5}) - (6-2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

حاصل ضرب این دو عبارت را هم با استفاده از اتحاد مزدوج به دست می‌آوریم:

$$(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}) = 6^2 - (2\sqrt{5})^2 = 16 \Rightarrow \text{جواب سوال} = 16 - 4\sqrt{5}$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مزدوج)

۶- گزینه «۱» - طبق اتحاد:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Rightarrow x^3 + 27 = (x^3 + 3^3) = (x+3)(x^2 - 3x + 9), x^3 - 4 = (x-2)(x+2)$$

پس عامل $x-3$ در عبارت وجود ندارد. (اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - تجزیه)

۷- گزینه «۱» -

$$2x^2 + 2x^2 - 4x = 2x(x^2 + x - 2) = 2x(x+2)(x-1) \Rightarrow \text{عبارت } (x+1) \text{ بخش پذیر نیست}$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد جمله مشترک)

۸- گزینه «۲» - عبارت داده شده را با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل باز می‌کنیم:

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^2 = (2x^3)^2 - 2(2x^3)\left(\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 4x^6 - 12x^2 + \frac{9}{x^2} = 4x^6 - 12x^2 + \frac{9}{x^2} \Rightarrow \frac{54}{-36} = -\frac{3}{2}$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مکعب)

۹- گزینه «۱» -

$$a^2 = b^2 - 1 \Rightarrow b^2 - a^2 = 1$$

عبارت $b^6 - a^6$ را می‌توان به صورت $(b^2)^3 - (a^2)^3$ نوشت. به کمک نتیجه اتحاد مکعب تفاضل یعنی $x^3 - y^3 = (x-y)^2 + 3xy(x-y)$ باز می‌کنیم:

$$(b^2)^3 - (a^2)^3 = \underbrace{(b^2 - a^2)^2}_1 + 3b^2 a^2 \underbrace{(b^2 - a^2)}_1 = 3b^2 a^2 + 1 \Rightarrow \frac{b^6 - a^6 - 1}{3a^2 b^2} = 1$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مکعب)

۱۰- گزینه «۳» -

$$8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)((2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2) = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

$$\Rightarrow (2x - 3y^2)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x - 3y^2)(A + B + 9y^2) \Rightarrow A + B = 4x^2 + 6xy^2$$

(اکبری) (فصل اول - عبارتهای جبری - اتحاد مکعب)