ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» ـ

$\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$: اعداد تک‌رقمی زوج $\Rightarrow$ ۴ عدد

$\{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\}$: اعداد تک‌رقمی فرد $\Rightarrow$ ۵ عدد

$\Rightarrow$ طبق اصل جمع: $۵ + ۴ = ۹$

※ اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد. (اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل جمع) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ چون این شخص نمی‌تواند هم‌زمان از هر سه وسیله نقلیه استفاده کند و برای رفتن به محل کار فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند، از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

تعداد کل حالت‌ها : $\underset{\text{تاکسی}}{\underset{\downarrow}{۲}} + \overset{\text{مترو}}{\overset{\uparrow}{۳}} + \underset{\text{اتوبوس}}{\underset{\downarrow}{۲}} = ۷$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل جمع) (متوسط)

۳- گزینه «۱» ـ برای هر سکه دو حالت وجود دارد: «رو» و «پشت»، بنابراین برای ۵ سکه تعداد حالت‌ها برابر $۳۲ = ۲^۵$ می‌باشد، از طرفی در تاس اعداد زوج عبارتند از ۲ , ۴ , ۶ که تعداد آن‌ها برابر ۳ می‌باشد، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= ۳۲ \times ۳ = ۹۶$

※ اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیرد، به‌طوری‌که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل ضرب) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ با استفاده از اصل ضرب داریم:

تعداد کل انتخاب‌ها $= ۷ \times ۲ \times ۳ = ۴۲$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل ضرب) (متوسط)

۵- گزینه «۴» ـ

$$(n+۱)! = (n+۱)n(n-۱)! \Rightarrow \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۲۰ \Rightarrow \frac{n(n+۱)(n-۱)!}{(n-۱)!} = ۲۰ \Rightarrow n^۲ + n - ۲۰ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (n+۵)(n-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = -۵ \times \\ n = ۴ \checkmark \end{cases} \Rightarrow n! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ نماد فاکتوریل) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ

$$\frac{۱۰!}{۹!} \times \frac{۳!}{۵!} = \frac{۱۰ \times ۹!}{۹!} \times \frac{۳!}{۵ \times ۴ \times ۳!} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ نماد فاکتوریل) (آسان)

۷- گزینه «۱» ـ باید با ارقام ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ اعداد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بسازیم. چون در متن سؤال محدودیتی ذکر نشده، بنابراین فرض می‌کنیم که تکرار ارقام مجاز است:

$\boxed{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\overset{\uparrow}{۵}}}\boxed{\underset{۱,۳,۵,۷,۹}{\underset{\downarrow}{۵}}}\boxed{\underset{۱,۳,۵,۷,۹}{\underset{\downarrow}{۵}}}\boxed{\overset{\text{فقط ۵}}{\overset{\uparrow}{۱}}}$ تعداد اعداد مطلوب $= ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۱ = ۱۲۵$

※ عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

(سراسری خارج از کشور ـ ۹۱ باتغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت)(دشوار)

۸- گزینه «۳» ـ چون روی سؤال گفته شده دو حرف A کنار هم باشند، بنابراین با استفاده از جایگشت داریم:

$\boxed{AA}FRHD \Rightarrow$ تعداد کل رمزها $= ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

(سراسری ـ ۹۶ با تغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت) (متوسط)

۹- گزینه «۲» ـ ابتدا رقم‌های زوج را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$\boxed{۲ , ۴ , ۸}$

که خود این اعداد جایگشت آن‌ها !۳ است، بنابراین کل اعداد عبارت است از:

$\boxed{۲ , ۴ , ۸}\,۱ , ۵ , ۷ \Rightarrow$ تعداد کل $= ۴! \times ۳!$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» ـ چون کلمات بدون تکرار حروف می‌باشند، بنابراین داریم:

$$\text{F , H , M , E , R} \xrightarrow{\text{۵ حرف}} \text{تعداد کلمات} = ۵!$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت) (آسان)

۱۱- گزینه «۴» ـ با استفاده از تبدیل (انتخاب r شئ از بین n شئ که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد) داریم:

$$p(n , r) = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow p(۱۰ , ۲) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!} \Rightarrow p(۱۰ , ۲) = \frac{۱۰\times ۹\times ۸!}{۸!} = ۹۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» ـ کلمه «فرسودگی» دارای ۷ حرف است. چون کلمه ۵ حرفی خواسته شده دارای حرف «گ» نیست و حرف «س» در اول است، بنابراین ۴ حرف را باید از بین حروف «ف، ر، و، د، ی» انتخاب کنیم، در نتیجه داریم:

$$p(۵ , ۴) = \frac{۵!}{(۵-۴)!} = \frac{۵!}{۱!} = ۵!$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل) (دشوار)

۱۳- گزینه «۲» ـ عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم:

$۵x+۶$: پنج برابر عدد به علاوه شش

$-x-۱۲$: قرینه عدد منهای دوازده

$$\Rightarrow ۵x+۶ = -x-۱۲ \Rightarrow ۵x+x = -۱۲-۶ \Rightarrow ۶x = -۱۸ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow x^۲ = (-۳)^۲ = ۹$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ معادله و مسائل توصیفی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ـ اگر یک عبارت درجه دوم، مربع کامل باشد، بنابراین دلتای آن صفر است.

$$-ax^۲+۳x-۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲-۴ac = (۳)^۲-۴(-a)(-۹)$$

$$\Delta = ۹-۳۶a \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۹-۳۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

$$-\frac{۱}{۴}x^۲+۳x-۹ = ۰$$

معادله درجه دوم که دلتای آن صفر باشد، ریشه مضاعف دارد که عبارت است از $x = -\frac{b}{۲a}$، بنابراین داریم:

$$x = -\frac{۳}{۲(-\frac{۱}{۴})} = ۶ \Rightarrow x = ۶$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ حل معادله درجه دوم و کاربردها) (دشوار)

۱۵- گزینه «۳» ـ $x = -۴$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x = -۴ \Rightarrow ۲(-۴)^۲-a(-۴)+۲۸ = ۰ \Rightarrow ۳۲+۴a+۲۸ = ۰ \Rightarrow a = -۱۵ \Rightarrow ۲x^۲+۱۵x+۲۸ = ۰$$

$$\Delta = b^۲-۴ac = (۱۵)^۲-۴(۲)(۲۸) = ۱ \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱۵+۱}{۲(۲)} = \frac{-۱۴}{۴} = -\frac{۷}{۲}$$

$$x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۱۵-۱}{۲(۲)} = \frac{-۱۶}{۴} = -۴ \Rightarrow \text{ریشه داده شده}$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ حل معادله درجه دوم و کاربردها) (متوسط)

۱۶- گزینه «۱» ـ در حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل، در صورت یک نبودن ضریب جمله درجه دوم، تمام جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم، سپس نصف ضریب x را به توان دو رسانده و به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$-۳x^۲+x+۶ = ۰ \xrightarrow{\div(-۳)} x^۲-\frac{۱}{۳}x-۲ = ۰$$

$$\text{نصف ضریب x به توان دو} = (\frac{-\frac{۱}{۳}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۳۶}$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ حل معادله درجه دوم و کاربردها) (آسان)

۱۷- گزینه «۲» ـ در معادله درجه دوم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ است.

$$-\frac{b}{a}=\frac{۹}{۲} \Rightarrow -\frac{m}{۲}=\frac{۹}{۲} \Rightarrow m=-۹ \Rightarrow ۲x^{۲}-۹x+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \Delta=b^{۲}-۴ac \end{cases} \Rightarrow \Delta=۸۱-۴(۲)(۴)$$

$$\Rightarrow \Delta=۴۹ \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=\frac{۹+۷}{۴} \\ x_{۲}=\frac{۹-۷}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=۴ \\ x_{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{ریشه کوچک‌تر}: x=\frac{۱}{۲}$$

* با استفاده از روش تجزیه نیز می‌توان ریشه‌ها را به‌دست آورد.

$$۲x^{۲}-۹x+۴=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲x-۱)(۲x-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \ \checkmark \\ x=۴ \end{cases}$$

(سراسری خارج از کشور ـ ۹۰ با تغییر) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ حل معادله درجه دوم و کاربردها) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{x}{x-۲}=۳ \xrightarrow[\text{مشترک گیری}]{\text{مخرج}} \frac{(x-۲)-x(x-۱)-۳(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)}=۰$$

$$\Rightarrow x-۲-x^{۲}+x-۳x^{۲}+۹x-۶=۰ \Rightarrow -۴x^{۲}+۱۱x-۸=۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}=\frac{-۸}{-۴}=۲$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (آسان)

۱۹- گزینه «۴» ـ دو عدد زوج طبیعی متوالی را k و $k+۲$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k+۲}=\frac{۵}{۱۲} \xrightarrow[\text{مشترک گیری}]{\text{مخرج}} \frac{k+۲+k-\frac{۵}{۱۲}k(k+۲)}{k(k+۲)}=۰ \Rightarrow ۲k+۲-\frac{۵}{۱۲}k^{۲}-\frac{۵}{۶}k=۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۵}{۱۲}k^{۲}+\frac{۷}{۶}k+۲=۰ \xrightarrow{\times(۱۲)} -۵k^{۲}+۱۴k+۲۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \Delta=b^{۲}-۴ac \end{cases} \Rightarrow \Delta=۶۷۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{۱}=\frac{-۱۴+۲۶}{-۱۰}=-\frac{۶}{۵} \times \text{غ ق ق} \\ k_{۲}=\frac{-۱۴-۲۶}{-۱۰}=۴ \checkmark \Rightarrow \text{دو عدد زوج طبیعی متوالی}: ۴\,,\,۶ \end{cases}$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (دشوار)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$۲x-\frac{x^{۲}-۴x}{x-۲}=\frac{x+۶}{x-۲} \Rightarrow \frac{۲x(x-۲)-x^{۲}+۴x-x-۶}{(x-۲)}=۰ \Rightarrow x^{۲}-x-۶=۰$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جمله}} (x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \checkmark \\ x=-۲ \checkmark \end{cases}$$

(سراسری ـ ۹۵ با تغییر) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (متوسط)