ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» ـ طبق اصل جمع تعداد روش‌های ممکن برای انتخاب یک شاخه گل به‌صورت زیر است:

$۴+۲+۳=۹$

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اصل جمع) (آسان)

۲- گزینه «۱» ـ معلم می‌تواند فقط یک نفر را انتخاب کند که این فرد یا از دانش‌آموزان دوازدهم است یا از دانش‌آموزان یازدهم؛ یعنی او نمی‌تواند یک نفر از هر دو گروه به‌طور همزمان انتخاب کند، لذا باید از اصل جمع استفاده کنیم:

تعداد حالت‌ها $= ۴+۲=۶$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اصل جمع) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ـ این شخص، هم می‌تواند کتاب رمان انتخاب کند و هم کتاب روان‌شناسی (به‌طور هم‌زمان)، بنابراین از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری‌که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیش از دو مرحله است.)

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اصل ضرب) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ تعداد حالت‌هایی که در آن تاس عدد زوج بیاید، برابر ۳ است:

تاس زوج بیاید: $\{۲,۴,۶\}$

تعداد حالت‌هایی که سکه رو بیاید، ۲ می‌باشد. (دو سکه داریم)

طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها عبارت است از:

$۳\times ۲=۶$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اصل ضرب) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ـ $(n+۲)$ بزرگ‌تر از $(n-۱)$ است، بنابراین صورت کسر را باز می‌کنیم:

$$\frac{(n+۲)!}{n(n-۱)!}=۶ \Rightarrow \frac{(n+۲)(n+۱)n(n-۱)!}{n(n-۱)!}=۶ \Rightarrow (n+۲)(n+۱)=۶ \Rightarrow n^۲+۳n+۲=۶$$

$$\Rightarrow n^۲+۳n-۴=۰ \Rightarrow (n-۱)(n+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \checkmark \\ n=-۴ \times \end{cases} \Rightarrow n^۲=۱$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ فاکتوریل) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ اعداد زوج و چهار رقمی که با این ارقام می‌توان ساخت یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۸ ، ۶ ، ۴ . تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آن‌ها را جمع می‌کنیم:

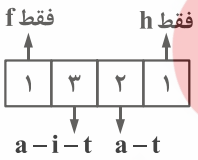
تعداد چهاررقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند: $۴\times ۳\times ۲\times ۱=۴!=۲۴$

تعداد چهاررقمی‌هایی که به ۸ ، ۶ ، ۴ ختم می‌شوند: $۳\times ۳\times ۲\times \underset{\text{۴ یا ۶ یا ۸}}{\downarrow ۳}=۵۴$

تعداد کل ارقام $= ۲۴+۵۴=۷۸$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (دشوار)

۷- گزینه «۴» ـ



تعداد حالت‌ها $= ۱\times ۳\times ۲\times ۱=۶$

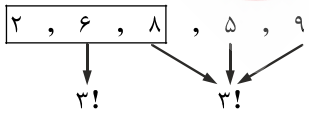
(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ با توجه به روی سؤال، ماشین‌های مگان کنار هم و ماشین‌های پراید نیز کنار هم باشند، پس هر کدام را یک بسته در نظر می‌گیریم، جایگشت آن‌ها $۲!$ است، از طرفی ماشین‌های مگان در کنار هم به $۴!$ حالت جایگشت دارند و ماشین‌های پراید نیز به $۳!$ حالت جایگشت دارند، بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$۲!\times ۴!\times ۳!=۲\times ۲۴\times ۶=۲۸۸$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ ابتدا رقم‌های زوج را یک بسته در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که اعداد زوج جایگشت $۳!$ دارند. همچنین اعداد زوج و اعداد ۵ و ۹ نیز جایگشت $۳!$ دارند، در نتیجه داریم:



تعداد ارقام مطلوب $= ۳!\times ۳!=۶\times ۶=۳۶$

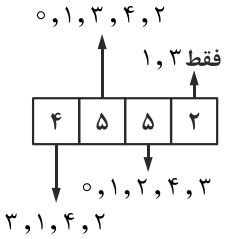
(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ چون ترتیب انتخاب افراد مهم است، در نتیجه به کمک فرمول تبدیل داریم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow p(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!} \Rightarrow p(۶,۳)=۱۲۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ تبدیل) (آسان)

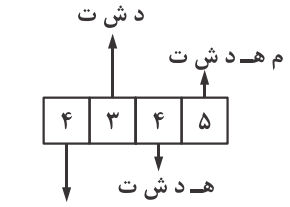
۱۱- گزینه «۴» ـ چون تکرار ارقام مجاز است، نباید رقمی را خط بزنیم. فقط عدد صفر در خانه اول از سمت چپ نمی‌تواند قرار گیرد. شرط اصلی فرد بودن عدد است، پس ابتدا اولین خانه سمت راست را پر می‌کنیم:



تعداد اعداد = $۴\times۵\times۵\times۲=۲۰۰$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ـ در کلمه «ماهدشت» ۴ حرف بی‌نقطه داریم. چون کلمه فارسی است، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم:



تعداد کلمات: $۴\times۳\times۴\times۵=۲۴۰$

$۵!=۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$

$۲!\times۵!=۲۴۰$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ جایگشت) (دشوار)

۱۳- گزینه «۳» ـ چون با جابه‌جایی هر رقم از این عدد سه رقمی با رقم دیگر یک عدد سه رقمی جدید حاصل می‌شود از تبدیل استفاده می‌کنیم (ترتیب قرار گرفتن اهمیت دارد):

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} \Rightarrow p(۷,۳)=۲۱۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ تبدیل) (متوسط)

۱۴- گزینه «۲» ـ تعداد مهره‌های بنفش را x در نظر می‌گیریم. تعداد مهره‌های قرمز چهار برابر مهره‌های بنفش است، پس $۴x$ مهره قرمز داریم، از طرفی تعداد مهره‌های آبی نصف مهره‌های قرمز است، بنابراین تعداد مهره‌های آبی برابر $\frac{۱}{۲}(۴x)$ است، بنابراین $۲x$ مهره آبی داریم:

$$\underset{\text{بنفش}}{x}+\underset{\text{قرمز}}{۴x}+\underset{\text{آبی}}{۲x}=۷۰ \Rightarrow ۷x=۷۰ \Rightarrow x=۱۰ \Rightarrow \text{تعداد مهره‌های قرمز}=۴x=۴\times۱۰=۴۰$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ معادله و مسائل توصیفی) (دشوار)

۱۵- گزینه «۱» ـ ابتدا معادله را به شکل زیر می‌نویسیم و سپس با استفاده از اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$x^۴-x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow (x^۲)^۲-(x^۲)-۱۲=۰ \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جمله}} (x^۲-۴)(x^۲+۳)=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۲)(x+۲)(x^۲+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲+۳=۰ \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=-۲+۲=۰$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» ـ با استفاده از روش Δ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (4)^2 - 4(1)(\frac{7}{4}) = 16 - 7 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-4-3}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ریشه کوچک‌تر} = -\frac{7}{2}$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» ـ اگر بین ضرایب معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $a + c = b$ برقرار باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌های معادله برابر ۱- و ریشه دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ است.

$$-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \text{رابطه } a + c = b \text{ برقرار است.} \Rightarrow x_1 = -1 , x_2 = -\frac{\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = 4$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ حل معادله درجه ۲ و کاربردها) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» ـ

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+2} = 2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{x+2+x(x-1)-2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow \frac{x+2+x^2-x-2(x^2+x-2)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow x+2+x^2-x-2x^2-2x+4=0 \Rightarrow -x^2-2x+6=0 \Rightarrow x^2+2x-6=0$$

از روش دلتا استفاده می کنیم

$\Delta = 28 > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه دارد

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2+\sqrt{28}}{2} = -1+\sqrt{7} \\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{28}}{2} = -1-\sqrt{7} \end{cases}$$

هر دو ریشه قابل قبولند چون مخرج را صفر نمی‌کنند. (اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (متوسط)

۱۹- گزینه «۴» ـ

$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{m}{x-2} \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 - \frac{m}{x-2} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گیری}} \frac{x(x-2)-1(x-1)(x-2)-m(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2-2x-x^2+3x-2-mx+m}{(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow (1-m)x-2+m=0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله ریشه مضاعف دارد. $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1-m)^2 - 4(0)(-2+m) = 0$

$$\Delta = (1-m)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$\frac{\text{جرم سرب}}{\text{جرم جیوه}} = 2$$

جرم جیوه: $x \Rightarrow$ جرم سرب: $2x$

جرم ماده اولیه: $x + 2x = 3x$

اگر ۶۰ گرم سرب اضافه کنیم:

$$\begin{cases} \text{جرم ماده}: 3x+60 \\ \text{جرم سرب}: 2x+60 \end{cases}$$

$\frac{3}{4}$ ماده جدید سرب است:

$$\frac{2x+60}{3x+60} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4(2x+60) = 3(3x+60) \Rightarrow 8x+240 = 9x+180 \Rightarrow x = 60$$

جرم ماده اولیه: $x + 2x = 3x = 3 \times 60 = 180$

(اکبری) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۳ ـ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا) (دشوار)