

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۲» - عرض مستطیل x و طول آن $\frac{3}{4}x = \frac{1}{5}x$ است و طبق فرض مسئله داریم:

$$2(x + \frac{3}{4}x) = 6 \Rightarrow 2(\frac{7}{4}x) = 6 \Rightarrow \frac{7}{2}x = 6 \Rightarrow x = \frac{6 \times 2}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow \text{طول} = \frac{3}{4}(\frac{12}{7}) = \frac{9}{7}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} = \frac{12}{7} \times \frac{9}{7} = \frac{108}{49}$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۱ - معادله درجه اول) (آسان)

۲- گزینه «۴» -

$$4x^2 + ax + 9 = 0 \Rightarrow a = 4, b = a, c = 9$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(4)(9) = 0 \Rightarrow a^2 - 144 = 0 \Rightarrow a^2 = 144$$

$$a = \pm\sqrt{144} \Rightarrow a = \pm 12 \xrightarrow{a > 0} a = 12 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$X_1 = X_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(4)} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۲ - معادله درجه دوم) (متوسط)

۳- گزینه «۳» -

$$2x^2 - (a + \Delta)x + 3a = 0 \Rightarrow a = 2, b = -(a + \Delta), c = 3a$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = \frac{-(-(a + \Delta))}{2} = \frac{a + \Delta}{2} = \frac{a}{2} + \frac{\Delta}{2}$$

$$2(a + \Delta) = 2(\Delta) \Rightarrow a + \Delta = \Delta \Rightarrow a = 0$$

$$\xrightarrow{a=2} 2x^2 - (2 + \Delta)x + 3(2) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(6) = 49 - 48 = 1$$

$$X_1, X_2 = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{8}{4} = 2 \\ X_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۲ - روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)

۴- گزینه «۲» -

$$4x^2 - \Delta x - 3 = 0 \Rightarrow a = 4, b = -\Delta, c = -3$$

$$\begin{aligned} \text{ضرب ریشه‌ها} & \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4} \\ \text{جمع ریشه‌ها} & \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-(-\Delta)}{4} = \frac{\Delta}{4} \end{aligned}$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-\Delta)}{4} = \frac{\Delta}{4}$$

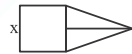
$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4}$$

در نتیجه داریم:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{4} + 1 = \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\Delta + 1}{4} = \frac{1}{5}$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۲ - روابط ریشه‌ها) (آسان)

۵- گزینه «۳» - قاعده مثلث همان ضلع مربع (X) است:



$$x^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{x \times 10}{2} = 5x$$

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^2 \quad \text{مساحت مربع}$$

طبق فرض مسئله داریم:

$$\frac{2}{3}x^2 = 5x + \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x^2 - 5x - \frac{10}{3} = 0 \xrightarrow{\times 3} 2x^2 - 15x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-15)^2 - 4(2)(-10) = 225 + 80 = 305$$

$$X_1, X_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{305}}{2(2)} = \frac{15 \pm \sqrt{305}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = 5(8) = 40 \\ X_2 = -\frac{2}{4} \quad \text{غ ق} \end{cases}$$

(سراسری) (پایه دهم - فصل اول - درس ۱ - کاربرد معادله درجه دوم) (دشوار)

۶- گزینه «۱» -

$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2} \Rightarrow \frac{11}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{x + 3}{x - 2} = \frac{2x - 3}{x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب همه جملات در } (x - 2)(x + 2)} 11 - (x + 2)(x + 3) = (x - 2)(2x - 3)$$

$$\Rightarrow 11 - x^2 - 5x - 6 = 2x^2 - 3x - 4x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 + x^2 + 5x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8$$

چون Δ منفی شده است، پس معادله جواب ندارد.

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۳ - معادلات گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۳» - فرض کنیم ماشین چاپ A کل کار را در روز تمام می‌کند. (در هر روز $\frac{1}{x}$)

کل کار، بنابراین ماشین B در $x + 5$ روز کار را انجام می‌دهد (در هر روز $\frac{1}{x + 5}$ کل کار) و

اگر با هم کار کنند، در ۶ روز کار انجام می‌شود (در هر روز $\frac{1}{6}$ کل کار):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x + 5 + x}{x(x + 5)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2x + 5}{x(x + 5)} = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2 + 5x = 12x + 30 \Rightarrow x^2 + 5x - 12x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس ۳ - معادله گویا) (متوسط)

۸- گزینه «۱» - تعداد افراد در مرحله اولیه n نفر بوده‌اند، بنابراین به هریک $\frac{1}{n}$ کیل رسید

است. در مرحله بعد به هر فرد $\frac{1}{n + 1}$ کیل رسید است. از آنجا که در این مرحله به

هریک $\frac{1}{6}$ کم‌تر رسیده است، داریم:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n + 1 - n}{n(n + 1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{6}$$

$$n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n + 3)(n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + 3 = 0 \Rightarrow n = -3 \\ n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

(کتاب درسی) (پایه دهم - فصل اول - درس ۳ - معادله گویا) (دشوار)

۹- گزینه «۳» - دو مسیر برای رسیدن از شهر A به شهر D وجود دارد:

$$A \rightarrow B \rightarrow D = 3 \times 4 = 12$$

یا

$$A \rightarrow C \rightarrow D = 2 \times 3 = 6$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$12 + 6 = 18$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصول شمارش) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» - سؤال اول را به ۵ حالت، سؤال دوم را به ۵ حالت و... سؤال چهارم را نیز ۵ حالت می‌توان پاسخ داد:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصل ضرب) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» -

$$\begin{array}{ccccccc} \text{همه ارقام به جز صفر} & & & & \text{همه ارقام به جز} & & \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \boxed{4} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & = & 48 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{همه ارقام به جز} & & & & \\ & & \text{رقم به کار رفته} & & & & \\ & & \text{در صدگان} & & & & \end{array}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصل ضرب) (آسان)

۲۰- گزینه «۴» - چون ترتیب چیدمان کتابها مدنظر است، پس از فرمول ترتیب استفاده می کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(11, 3) = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = 990.$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - تبدیل) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» - حروف a, d, M را یک شی در نظر می گیریم و کلاً ۴ شی داریم و جایگشت ۶ شی متمایز برابر است با ۴!:

$$\boxed{a, d, M}, o, r, i$$

از طرفی ۳ شی داخل بسته خود به ۳! طریق جایگشت دارند و در نهایت تعداد کل جایگشتها برابر است با:

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - جایگشت) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» - باید دو حالت در نظر بگیریم:

الف) رقم یکان صفر باشد:

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{1} = 120.$$

↑
فقط صفر

یا

ب) رقم یکان ۵ باشد:

$$\boxed{5} \times \boxed{6} \times \boxed{4} \times \boxed{1} = 100.$$

↑
فقط رقم ۵

↓
همه ارقام به جز صفر و ۵

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$120 + 100 = 220.$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - جایگشت) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» -

$$\boxed{1} \times \boxed{3} \times \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 6$$

یا $\Rightarrow 6 + 6 = 12$

$$\boxed{3} \times \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 6$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصل ضرب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» - چهار رقم زوج غیرصفر داریم:

$$(8, 6, 4, 2)$$

$$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{4} = 4^4 = 1024$$

(سرآرشی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصل ضرب) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» -

$$\boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 60.$$

↑
فقط ارقام ۸, ۵, ۴

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - اصل ضرب) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» -

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12} \Rightarrow n(n+1) = 12 \Rightarrow n^2 + n - 12 = 0.$$

$$(n+4)(n-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n+4=0 \Rightarrow n=-4 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

غیرقابل قبول - قابل قبول

$$P(8, n) \stackrel{n=3}{=} P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - فاکتوریل) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» -

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{1} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 720.$$

↑
فقط حرف O

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - جایگشت) (آسان)

۱۹- گزینه «۲» - تعداد جایگشتهای دوری (دایره ای) n شی متمایز برابر (n-1)! است، پس این ۵ شی به ۴! = (5-1)! جایگشت دایره ای دارند و:

$$\boxed{A, B}, C, D, E, F$$

چون A و B خود به ۲! طریق جایگشت خواهند داشت، پس تعداد کل جایگشتها برابر است با:

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

(سرآرشی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس ۱ - جایگشت دایره ای) (دشوار)