

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۱» - این شرکت شنبه X واحد، یکشنبه $2X$ واحد و دوشنبه $4X$ واحد و سه‌شنبه $8X$ واحد و چهارشنبه $16X$ واحد تولید می‌کند. طبق فرض مسئله داریم:

$$4X = 1620 \Rightarrow X = \frac{1620}{4} = 405$$

پس تولید روز شنبه ۴۰۵ واحد است.
مجموع تولید ۵ روز برابر است با:

$$X + 2X + 4X + 8X + 16X = 31X$$

$$31X = 31(405) = 12555$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - معادلات توصیفی) (متوسط)

۲- گزینه «۴» - در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $b = 0$ و $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه قرینه است:

$$3x^2 + (16 - m^2)x + m + 3 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 16 - m^2, c = m + 3$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{m^2 - 16}{3} \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

اگر $m = 4$ باشد معادله به صورت $3x^2 + 7 = 0$ خواهد بود که معادله جواب ندارد زیرا Δ منفی است:

$$\Delta = (0)^2 - 4(3)(7) = -84$$

اگر $m = -4$ باشد معادله به صورت $3x^2 - 1 = 0$ خواهد بود که معادله جواب خواهد داشت زیرا Δ مثبت است:

$$\Delta = (0)^2 - 4(3)(-1) = 12$$

پس $m = -4$ قابل قبول است:

$$mx - 8 = 0 \Rightarrow -4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{-4} = -2$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$x^2 - 2mx + m + 6 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2m, c = m + 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4(1)(m + 6)$$

$$= 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m + 2)(m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2 \\ m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

اگر $m = 3$ باشد (مقدار مثبت m) خواهیم داشت:

$$x^2 + 2(3)x + (3) + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{(-6)}{2(1)} = -\frac{6}{2} = -3$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس دوم - معادله درجه دوم) (دشوار)

۴- گزینه «۲» -

$$x^2 - 5x + a = 0 \Rightarrow a = 1, b = -5, c = a$$

فرض کنیم α و β ریشه‌های این معادله باشند.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5 \Rightarrow \alpha + \beta = 5$$

طبق فرض مسئله یکی از ریشه‌ها ۷ واحد بیش‌تر از ریشه دیگر است. پس:

$$\alpha - \beta = 7$$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 7 \end{cases}$$

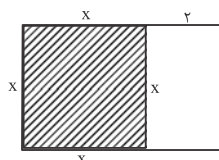
$$2\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow 6 + \beta = 5 \Rightarrow \beta = 5 - 6 = -1$$

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{\beta - 1}{a} \rightarrow (-1)^2 - 5(1) + a = 0 \Rightarrow 1 - 5 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۵- گزینه «۳» - ضلع مربع رنگی را X فرض می‌کنیم:



$$S_{\square} = x^2 = \text{مساحت مربع}$$

طول مستطیل $x + 2$ و عرض آن x است:

$$S_{\square} = x(x + 2) = x^2 + 2x = \text{مساحت مستطیل}$$

حال طبق فرض مسئله داریم:

$$x^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x) + 18 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 = x^2 + 6x + 72$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x^2 - 6x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 6)(x - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \\ x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(x + x + 2) = 2(2x + 2) = 4x + 4 = 4(12) + 4 = 48 + 4 = 52$$

(سراسری) (پایه دهم - فصل اول - درس دوم - مسائل توصیفی معادله درجه دوم) (متوسط)

۶- گزینه «۱» - می‌دانیم ریشه معادله در معادله صدق می‌کند:

$$x = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{6(-\frac{1}{5}) - \frac{1}{5} + a}{-\frac{1}{5} - 1} = 3$$

$$\frac{-\frac{6}{5} - \frac{1}{5} + a}{-\frac{6}{5} - \frac{5}{5}} = 3 \Rightarrow \frac{\Delta(a - 1)}{\Delta(-3)} = 3$$

$$\frac{\Delta a - 1}{-3} = 3 - 1 \Rightarrow \frac{\Delta a - 1}{-3} = 2 \Rightarrow \Delta a - 1 = -6 \Rightarrow \Delta a = -5 \Rightarrow a = -1$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - معادلات گویا) (آسان)

۷- گزینه «۴» - عبارت $4 - x^2$ را به صورت تجزیه شده می‌نویسیم:

$$\frac{x}{2-x} + \frac{2x-2}{2+x} = \frac{11}{(2-x)(2+x)}$$

$$\frac{x}{2-x} + \frac{2x-2}{2+x} - \frac{11}{(2-x)(2+x)} = 0$$

$$\frac{x(2+x) + (2x-2)(2-x) - 11}{(2-x)(2+x)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + x^2 + 4x - 2x^2 - 4 + 2x - 11 = 0 \Rightarrow -x^2 + 8x - 11 = 0$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-11}{-1} = 11$$

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - معادلات گویا) (متوسط)

۸- گزینه «۱» - فرض کنیم دستگاه جدید در x ساعت کل کار را انجام می‌دهد (در هر

ساعت $\frac{1}{x}$ کل کار) دستگاه قدیمی در $x + 6$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد (در هر

ساعت $\frac{1}{x+6}$ کل کار) و اگر با هم کار کنند کل کار در ۴ ساعت انجام می‌شود. (در هر

ساعت $\frac{1}{4}$ کل کار)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+6+x}{x(x+6)} = \frac{1}{4}$$

$$4(2x+6) = x(x+6) \Rightarrow x^2 + 6x - 8x - 24 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

پس دستگاه جدید در ۶ ساعت کل کار را انجام می‌دهد و نصف کل کار تولید محصول را در $6 \div 2 = 3$ ساعت انجام می‌دهد.

(یگانه) (پایه دهم - فصل اول - درس سوم - کاربرد معادلات گویا) (دشوار)

۹- گزینه «۴» - حالات مختلفی که می‌توان از شهر A به شهر D رسید به صورت زیر است

که در هر کدام، حالات مختلف را به دست می‌آوریم:

$$1) A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

$$2) A \Rightarrow B \Rightarrow D = 3 \times 1 = 3$$

$$3) A \Rightarrow C \Rightarrow D = 1 \times 2 = 2$$

حال طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$$24 + 3 + 2 = 29$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - اصول شمارش) (متوسط)

۱۰ - گزینه «۴» - حروف کلمه «فردوسی» شامل «ف، ر، د، و، س، ی» است. اگر بخواهیم در یک کلمه چهار حرفی ۲ حرف نقطه‌دار باشند پس الزاماً حرف «ی» در آخر کلمه نباید قرار بگیرد.

$$\begin{array}{c} * \\ \boxed{5} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 300 \\ \uparrow \\ \text{به جز ی} \end{array}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (متوسط)

۱۱ - گزینه «۴» - پنج رقم زوج شامل ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ داریم:

$$\begin{array}{c} \boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 4 \times 4! = 4 \times 24 = 96 \\ \uparrow \\ \text{به جز صفر} \end{array}$$

دقت کنید که صفر در اولین جایگاه سمت چپ در اعداد قرار نمی‌گیرد.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (آسان)

۱۲ - گزینه «۲» -

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 1 \times 6! = 1 \times 720 = 720 \\ \uparrow \\ \text{حالت ۱} \end{array}$$

R, E, S, L, T, A

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (آسان)

۱۳ - گزینه «۴» -

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 12600$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 ارقام ارقام حروف
 ۹, ۷, ۵, ۳, ۱, ۸, ۶, ۴, ۲
 (M, H, A)

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (متوسط)

۱۴ - گزینه «۳» - باید دو حالت در نظر گرفت:

الف) یکان صفر باشد:

$$\begin{array}{c} \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 24 \\ \downarrow \\ \text{فقط صفر} \end{array}$$

ب) یکان ۲ یا ۴ باشد:

$$\begin{array}{c} \boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{2} = 36 \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{صفر نمی آید} \quad \text{ارقام ۲ یا ۴} \end{array}$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با: $24 + 36 = 60$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (متوسط)

۱۵ - گزینه «۱» -

□□□□□

$$6 \times 2 = 12 \Rightarrow 6 \times 2 = 12$$

$$2 \times 1 = 2 \Rightarrow 2 \times 1 = 2$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (متوسط)

۱۶ - گزینه «۲» -

$$\boxed{3, 5, 7}, 1, 2, 4, 6$$

بسته ۰، ۲، ۳ را یک شی در نظر می‌گیریم پس کاملاً ۵ شی داریم که جایگشت آن‌ها ۵! است. اما قرارگیری رقم ۵ بین ۳ و ۷ یعنی می‌تواند به صورت ۰، ۲، ۳، ۵، ۷ نیز باشد پس ۲ حالت دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

$$5! \times 2 = 120 \times 2 = 240$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (متوسط)

۱۷ - گزینه «۳» - مرحله اول: انتخاب ۲ نفر از بین ۸ نفر که ترتیب انتخاب آن‌ها مهم است:

$$P(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

مرحله دوم: انتخاب ۲ نفر از بین ۶ نفر باقی‌مانده که باز هم ترتیب انتخاب مهم است:

$$P(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$$

و در نهایت طبق اصل ضرب تعداد و کل حالات برابر است با:

$$56 \times 30 = 1680$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - مسائل ترتیب (تبدیل)) (متوسط)

۱۸ - گزینه «۳» - فرض کنیم، سؤال، تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار کم‌تر از ۴۰۰ را خواسته بود:

$$\begin{array}{c} * \\ \boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{2} = 24 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{ارقام ۳, ۲} \quad \text{صفر یا ۵} \end{array}$$

حال اعداد مضرب ۵ بزرگ‌تر یا مساوی ۴۰۰ و کم‌تر از ۴۴۰ را می‌شماریم:

۴۰۵، ۴۱۰، ۴۱۵، ۴۲۰، ۴۲۵، ۴۳۰، ۴۳۵

که تعداد آن‌ها ۷ تا است (دقت کنید که عدد ۴۰۰ دارای ارقام تکراری است).

پس در مجموع $24 + 7 = 31$ عدد با شرایط فوق وجود دارد.

(کنکور ۱۴۰۴ با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - شمارش) (دشوار)

۱۹ - گزینه «۲» -

$$\left. \begin{array}{l} \Delta P(n, r) = \frac{\Delta n!}{(n-r)!} \\ P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{(n-r)(n-r)!} = \frac{1}{(n-r)!} \xrightarrow{\text{حذف } (n-r)!} \frac{\Delta}{n-r} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow n-r=\Delta \Rightarrow n=7$$

$$P(n-1, r) = P(7-1, 3) = P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

۱۲ برابر ۵! است.

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل) (متوسط)

۲۰ - گزینه «۱» - می‌دانیم $8! = 8 \times 7 \times 6!$ است. پس:

$$\frac{8! - 6!}{8!} = \frac{8 \times 7 \times 6! - 6!}{8!} = \frac{6! (8 \times 7 - 1)}{8!} = \frac{6 \times 5! (56 - 1)}{8!} = \frac{6 \times 55}{8 \times 7} = \frac{33}{8}$$

(یگانه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - فاکتوریل) (متوسط)