ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ جملات شامل $x^۳$ باید از بین بروند پس باید ضریب $x^۳$ برابر صفر شود.

$$۱+۱+m=۰ \Rightarrow m=-۲$$

$$f(۱)=(۱)^۳+(۱+۱)^۳-۲(۱)^۳-۲(-۲)=۱+۸-۲+۴=۱۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای)

۲- گزینه «۴» ـ

$$f(۱)=۱ \Rightarrow a+b=۱ \qquad (۱)$$

$$f(۲)=۸ \Rightarrow ۸a+۲b=۸ \Rightarrow ۴a+b=۴ \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ ۴a+b=۴ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۳a=۳ \Rightarrow a=۱, b=۰ \Rightarrow f(x)=x^۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای)

۳- گزینه «۲» ـ

$$x^۲<x^۳ \Rightarrow x^۲(۱-x)<۰$$

x		۰		۱	
$x^۲(۱-x)$	$+$	۰	$+$	۰	$-$

$$x^۲(۱-x)<۰ \Rightarrow x>۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای)

۴- گزینه «۱» ـ نمودار داده شده از انتقال تابع $x^۳$ ساخته شده است، با توجه به نمودار، $f(x)$ به‌صورت $(x+۲)^۳+k$ می‌باشد.

$$(x+۲)^۳+k=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸+k \qquad (۱)$$

با مقایسه رابطه (۱) و تابع داده شده در مسئله معلوم می‌شود که $m=۱۲$ است.

$$f(x)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۹ \Rightarrow f(۰)=۱۹$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چند جمله‌ای)

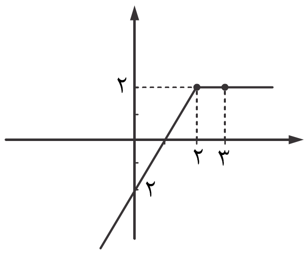
۵- گزینه «۲» ـ نمودار f یک سهمی است، اگر این سهمی را طوری محدود کنیم که در فاصله $[p,+\infty)$ صعودی اکید باشد باید رأس سهمی قبل از p یا برابر p باشد.

$$-\frac{b}{۲a}\le p \Rightarrow ۲\le p \Rightarrow \min p=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۶- گزینه «۴» ـ تابع $\log x$ صعودی اکید است در نتیجه $-\log(-x)$ نیز صعودی اکید است. تابع $\sqrt{x}$ صعودی اکید است پس تابع $-\sqrt{-x}$ نیز صعودی اکید است. تابع $x^۳$ صعودی اکید است در نتیجه تابع $x^۳+۱$ صعودی اکید است. تابع ۲^x صعودی اکید است در نتیجه تابع $۱-۲^x$ نزولی اکید خواهد بود. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۷- گزینه «۲» ـ بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم. برای این منظور از نقطه شکستگی $x=۲$ استفاده می‌کنیم:



x	۰	۲	۳
y	-۲	۲	۲

ملاحظه می‌کنید که تابع در فاصله $(-\infty, ۲]$ صعودی اکید است پس بیشترین مقدار k برابر ۲ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۸- گزینه «۳» ـ توجه داشته باشید که اگر تابع $f(x)$ و $af(bx)$ صعودی اکید باشند آن‌گاه a و b هم‌علامت‌اند و اگر $f(x)$ صعودی اکید و $af(bx)$ نزولی اکید باشد آن‌گاه a و b مختلف‌العلامتند. در این سؤال $\sqrt{x}$ صعودی اکید و $(m-۱)\sqrt{mx}$ نزولی اکید است پس m و $m-۱$ باید مختلف‌العلامت باشند.

$$m(m-۱)<۰ \Rightarrow ۰<m<۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی)

۹- گزینه «۴» ـ

$$(fog)(x) < -۴ \Rightarrow f(\frac{۱}{x+۱}) < -۴ \Rightarrow \frac{۲(\frac{۱}{x+۱})+۱}{\frac{۱}{x+۱}-۱} < -۴ \Rightarrow \frac{x+۳}{-x} < -۴ \Rightarrow \frac{x+۳}{x} - ۴ > ۰ \Rightarrow \frac{۳-۳x}{x} > ۰$$

x		۰		۱	
$\frac{۳-۳x}{x}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$\frac{۳-۳x}{x} > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq ۱ \mid \sqrt{x-۱} \in \mathbb{R} - \{\frac{۲}{۳}\}\}$$

$$\sqrt{x-۱} \neq \frac{۲}{۳} \Rightarrow x-۱ \neq \frac{۴}{۹} \Rightarrow x \neq \frac{۱۳}{۹}$$

$$D_{gof} = [۱, +\infty) - \{\frac{۱۳}{۹}\}$$

پس $a = \frac{۱۳}{۹}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع)

۱۱- گزینه «۲» ـ فرض می‌کنیم $f(x) = ax+b$، $a > ۰$ باشد.

$$(fof)(x) = a(ax+b)+b = a^۲x + ab + b$$

$$a^۲ = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۲ \Rightarrow (fof)(x) = ۴x + ۳b$$

$$۳b = -۱۲ \Rightarrow b = -۴ \Rightarrow f(x) = ۲x - ۴ \Rightarrow f(۰) = -۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$f = \{(۱,۱), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۷)\}$$

$$\begin{cases} (۳,۷) \in fog \Rightarrow a = ۷ \\ (۴,۹) \in gof \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a+b = ۱۶$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$x = ۳ \Rightarrow ۹m - ۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۴}{۹}$$

$$\frac{۴}{۹}x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹}$$

$$x = \frac{۱ \pm \frac{۵}{۳}}{\frac{۸}{۹}} = \frac{۹ \pm ۱۵}{۸} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ معادله‌ها و نامعادله‌ها ـ معادله درجه ۲)

۱۴- گزینه «۳» ـ خط تقارن‌های دو سهمی را حساب می‌کنیم و برابر هم قرار می‌دهیم.

$$\frac{-۳}{۲ \times \frac{۱}{۲}} = \frac{-m}{۲ \times (-۱)} \Rightarrow -۳ = \frac{m}{۲} \Rightarrow m = -۶$$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} + ۳x + ۶ = -x^۲ - ۶x + ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x^۲ + ۹x + ۴ = ۰$$

$$\Delta = (۹)^۲ - ۴(\frac{۳}{۲})(۴) = ۸۱ - ۲۴ = ۵۷ > ۰$$

چون $\Delta > ۰$ شد پس در دو نقطه مشترکند. (نصیری) (پایه دهم ـ معادله‌ها و نامعادله‌ها ـ سهمی)

۱۵- گزینه «۴» ـ باید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برای xهای مشترک هم‌علامت باشند که در هیچ بازه‌ای چنین اتفاقی نیفتاده است. پس جواب $\varnothing$ است.

(نصیری) (پایه دهم ـ نامعادلات ـ نامعادلات)

۱۶- گزینه «۳» ـ چون عبارت ۱+ | x | همواره مثبت است پس:

$$x^{۲}-۴x-۵<۰ \Rightarrow -۱<x<۵ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز بازه} = \dfrac{۵-۱}{۲}=۲ \\ \text{طول بازه} = ۵+۱=۶ \end{cases}$$

$$-۱<x<۵ \Rightarrow |x-۲|<۳$$

(نصیری) (پایه دهم ـ معادله‌ها و نامعادله‌ها ـ قدرمطلق)

۱۷- گزینه «۳» ـ چون تابع g ثابت و $g(۴)=۲$ است پس $g(x)=۲$ است. f تابع خطی گذرا از مبدأ مختصات است پس $f(x)=ax$ خواهد بود.

$$\frac{f(۲)+g(۳)}{۲f(۳)+g(۱)}=۴ \Rightarrow \frac{۲a+۲}{۶a+۲}=۴ \Rightarrow ۲a+۲=۲۴a+۸ \Rightarrow ۲۲a=-۶ \Rightarrow a=-\frac{۶}{۲۲}=-\frac{۳}{۱۱}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ تابع خطی و ثابت)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$S=\alpha+\beta=-۲ \;،\; P=\alpha\beta=-۱$$

$$x_۱=\frac{S}{\alpha+۱}=\frac{-۲}{\alpha+۱} \;،\; x_۲=\frac{P-۱}{\beta+۱}=\frac{-۲}{\beta+۱}$$

$$x_۱+x_۲=\frac{-۲}{\alpha+۱}+\frac{-۲}{\beta+۱}=\frac{-۲(\alpha+\beta)-۴}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{-۲(-۲)-۴}{-۱-۲+۱}=۰$$

$$x_۱x_۲=\frac{-۲}{\alpha+۱}\times\frac{-۲}{\beta+۱}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

معادله جدید: $x^{۲}-(x_۱+x_۲)x+x_۱x_۲=۰ \Rightarrow x^{۲}-۲=۰$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادله ـ روابط بین ریشه‌ها)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}+\sqrt[۳]{x-۱}-۲=۰ \xrightarrow{\sqrt[۳]{x-۱}=t} t^{۲}+t-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x-۱}=۱ \Rightarrow x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \\ t=-۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{x-۱}=-۲ \Rightarrow x-۱=-۸ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۱۴- است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ گنگ)

۲۰- گزینه «۳» ـ چون یکی از ریشه‌ها برابر ۳ است پس:

$$\frac{۱۲}{۳-۲}+\frac{۵+a}{۵}=۱۳ \Rightarrow \frac{۵+a}{۵}=۱ \Rightarrow a=۰$$

$$\frac{۴x}{x-۲}+\frac{۵}{x+۲}=۱۳ \xrightarrow{\times(x-۲)(x+۲)} ۴x(x+۲)+۵(x-۲)=۱۳(x^{۲}-۴)$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲}+۸x+۵x-۱۰=۱۳x^{۲}-۵۲ \Rightarrow ۹x^{۲}-۱۳x-۴۲=۰ \Rightarrow (x-۳)(۹x+۱۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-\dfrac{۱۴}{۹} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی و جبر ـ معادله گویا)

۲۱- گزینه «۲» ـ راه اول اگر ارتفاع و قاعده را به‌ترتیب h و a در نظر بگیریم:

$$a+h=۱۴ \Rightarrow h=۱۴-a$$

$$S=\frac{۱}{۲}a\times h=\frac{۱}{۲}a(۱۴-a)=۷a-\frac{۱}{۲}a^{۲}$$

$۷a-\frac{۱}{۲}a^{۲}$ معادله یک سهمی است پس رأس آن را حساب می‌کنیم:

$$a=۷ \Rightarrow h=۷ \Rightarrow S_{Max}=\frac{۱}{۲}(۷)^{۲}=۲۴/۵$$

راه دوم: اگر مجموع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد در این‌صورت حاصل‌ضرب آن وقتی ماکزیمم می‌شود که آن دو عدد برابر باشند، پس:

$$a=h=\frac{۱۴}{۲}=۷ \Rightarrow S_{Max}=\frac{۱}{۲}(۷)^{۲}=۲۴/۵$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ معادله‌ها و نامعادله‌ها ـ سهمی)

۲۲- گزینه «۳» ـ اگر مقدار نمک اضافه شده به ۸ کیلوگرم نمک در ۲۰۰ کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی x کیلوگرم باشد آن‌گاه $۸+x$ کیلوگرم نمک و $۲۰۰+x$ کل محلول است که به غلظت ۷ درصدی برسیم.

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰} \Rightarrow ۷x+۱۴۰۰=۸۰۰+۱۰۰x \Rightarrow ۹۳x=۶۰۰ \Rightarrow x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی و جبر ـ معادله گویا)

۲۳- گزینه «۱» ـ

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{۲-m}{۳}} \Rightarrow \frac{۱-۲m}{۳}=\frac{۳}{۲-m}$$

$$\Rightarrow (۱-۲m)(۲-m)=۹ \Rightarrow ۲-m-۴m+۲m^۲=۹$$

$$۲m^۲-۵m-۷=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲m-۱)^۲-۱۲(۲-m)$$
$$m=-۱ \Rightarrow \Delta=۹-۱۲\times۳<۰$$
$$m=\frac{۷}{۲} \Rightarrow \Delta=۳۶-۱۲\times\frac{-۳}{۲}>۰$$

پس $m=\frac{۷}{۲}$ صحیح است. (سراسری ۹۹) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی و جبر ـ روابط ریشه‌ها)

۲۴- گزینه «۴» ـ دو واحد از طرفین کم می‌کنیم:

$$-۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}-۲<۱ \Rightarrow -۱<\frac{۳-۳x}{۲x-۱}<۱ \Rightarrow \left|\frac{۳-۳x}{۲x-۱}\right|<۱$$

$$\xrightarrow{x\neq\frac{۱}{۲}} |۳-۳x|<|۲x-۱| \Rightarrow (۳-۳x-۲x+۱)(۳-۳x+۲x-۱)<۰$$

$$\Rightarrow (۴-۵x)(۲-x)<۰ \Rightarrow \frac{۴}{۵}<x<۲ \Rightarrow ۰/۸<x<۲$$

(سراسری ۹۹) (پایه دهم ـ معادله‌ها و نامعادله ـ نامعادله)

۲۵- گزینه «۲» ـ

$$\xrightarrow{x} \boxed{f(x)} \longrightarrow \boxed{g(x)} \longrightarrow gof(x)$$

برد $f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱ \Rightarrow ۰\le f(x)<۱$$

برد $f(x)$ ، دامنه $g(x)$ فرض می‌شود:

$$۰\le x<۱ \Rightarrow -۲\le x-۲<-۱ \Rightarrow ۱<(x-۲)^۲\le ۴$$
$$\Rightarrow -۴\le -x^۲+۴x-۴<-۱ \xrightarrow{+۴} ۰\le -x^۲+۴x<۳$$

پس برد $gof(x)$ برابر $[۰,۳)$ است. (سراسری ۹۹) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع)