

ریاضیات

۱- گزینه «۲» -

$$m^2 x^2 - 2mx - 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 4m^2 - 6m - 1 = 0 \Rightarrow m_1, m_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله - روابط بین ریشه‌ها) (متوسط)
 ۲- گزینه «۲» - معادله ریشه مضاعف دارد پس $\Delta = 0$ است.

$$\frac{1}{m} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{4} - 4 \left(\frac{1}{m} \right) \left(-\frac{1}{4} \right) = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{m}} = \frac{m}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - درجه دوم - حل معادله) (آسان)
 ۳- گزینه «۳» - راس سهمی را حساب می‌کنیم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{k}{2} \Rightarrow y = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} + k^2 = \frac{3}{4} k^2$$

$$y = x + 2 \xrightarrow{\left(\frac{k}{2}, \frac{3}{4}k^2\right)} \frac{3}{4}k^2 = \frac{k}{2} + 2 \xrightarrow{\times 4} 3k^2 - 2k - 8 = 0 \Rightarrow (k-2)(3k+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دهم - معادله درجه دوم) (متوسط)

۴- گزینه «۲» - برای آنکه ضرب x و $|x-4|$ مثبت شود دو حالت زیر رخ می‌دهد.

$$(1) \begin{cases} x > 0 \\ 4 - |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < x < 4 \xrightarrow{\cap} 0 < x < 4$$

$$(2) \begin{cases} x < 0 \\ 4 - |x| < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -4 \xrightarrow{\cap} x < -4$$

اجتماع (۱), (۲) جواب مسئله است:

$$x \in (-\infty, -4) \cup (0, 4)$$

(نصیری) (پایه دهم - نامعادله) (دشوار)

۵- گزینه «۲» -

$$x^2 + 4x = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f = \{(-4, -4), (-2, -4)\} \Rightarrow R_f = \{-4\}$$

(نصیری) (پایه دهم - تابع - مقدمات) (آسان)

۶- گزینه «۳» -

$$f(x) = 4x^2 + 4x + 1 + mx^2 + 5x + m = (4+m)x^2 + 9x + m + 1$$

چون f تابع خطی است بنابراین:

$$4 + m = 0 \Rightarrow m = -4 \Rightarrow f(x) = 9x - 3$$

$$f(m) = f(-4) = 9(-4) - 3 = -39$$

(نصیری) (پایه دهم - تابع - تابع خطی) (متوسط)

۷- گزینه «۴» -

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{-m}{-8} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow m = 4$$

$$S = \alpha + \beta = -m = -4$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله - روابط بین ریشه‌ها) (آسان)

۸- گزینه «۱» -

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-5}{4} \Rightarrow \frac{4+m^2}{2(1+m)} = \frac{5}{4} \Rightarrow 8 + 2m^2 = 5 + 5m \Rightarrow 2m^2 - 5m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو m به دست آمده قابل قبول نیست زیرا به ازای آنها ضرب x مثبت می‌شود که در این صورت سهمی مینیمم دارد.

(نصیری) (پایه یازدهم - سهمی) (دشوار)

۹- گزینه «۲» - طرفین معادله را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$2x^2 + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \Rightarrow 5x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$x = 1$ قابل قبول نیست زیرا ریشه مخرج است. پس معادله فقط یک ریشه $x = -\frac{2}{5}$ دارد.

(کتاب درسی) (پایه یازدهم - معادله - معادله گویا) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» -

$$t = 2 \Rightarrow \sqrt{10 - \frac{h}{5}} = 2 \Rightarrow 10 - \frac{h}{5} = 4 \Rightarrow h = 30$$

(نصیری) (پایه یازدهم - معادله - معادله گنگ) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» - اگر $m = 2$ باشد درجه چند جمله‌ای ۵ نخواهد بود.

$$m = 2 \Rightarrow p(x) = 2x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 2x^5 + 6x^4 \Rightarrow p(x) = 6x^3 - 2x^2$$

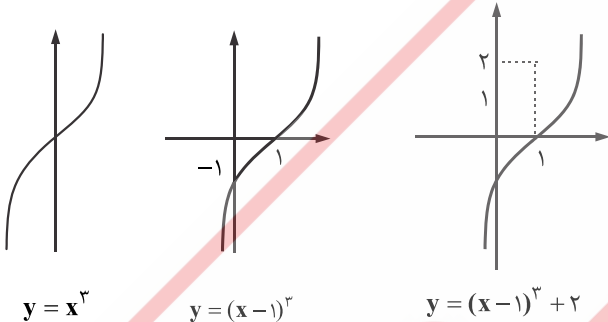
بنابراین درجه $p(x)$ برابر ۳ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - چندجمله‌ای) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» - تابع را ساده می‌کنیم.

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 6x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 = (x-1)^3 + 2$$

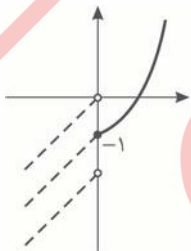
$$x^3 \longrightarrow (x-1)^3 \longrightarrow (x-1)^3 + 2$$

فرایند تشکیل این تابع به صورت زیر است.



ملاحظه می‌کنید که این تابع از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - رسم x^3) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» - نمودار تابع $x^3 - 1$ در بازه $[0, +\infty)$ را رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع f اکیداً صعودی باشد باید $k \leq -1$ باشد بنابراین با توجه به گزینه‌ها k می‌تواند $-\frac{5}{4}$ انتخاب شود.

(نصیری) (پایه دوازدهم - یکنوایی تابع) (دشوار)

۱۴- گزینه «۳» - ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 4x$ خواهد بود.

$$g(x) = (f \circ f)(x) = (4x)(4x) = 16x^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(4x) = 16(4x)^2 = 256x^2$$

$$256x^2 = x \Rightarrow 256x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{256} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» -

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{2}{x} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow a + b = 0 + 2 = 2$$

(کتاب درسی) (پایه دوازدهم - ترکیب دو تابع) (متوسط)

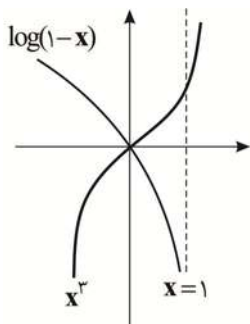
۱۶- گزینه «۳» -

$$f(x) = 4x^2 - 17x + 4 = (4x-1)(x-4)$$

$$f(g(x)) < 0 \Rightarrow (4g(x)-1)(g(x)-4) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < g(x) < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+1} < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < x+1 < 4 \Rightarrow -\frac{3}{4} < x < 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (دشوار)

۱۷- گزینه «۲» - نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنید که دو تابع در مبدأ مختصات متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - تبدیل توابع) (آسان)

۱۸- گزینه «۴» -

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2m-4)x - 4h$$

اگر $f-g$ هم صعودی و هم نزولی باشد آن‌گاه تابع ثابت است.

$$2m-4=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow f(x)=2x+h, g(x)=2x+\Delta h$$

$$(f \times g)(x) = (2x+\Delta h)(2x+h) = 4x^2 + 12hx + \Delta h^2$$

$$-\frac{12h}{2 \times 4} = 2 \Rightarrow h = -\frac{4}{3}$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 4 + 6h = 4 + 6\left(-\frac{4}{3}\right) = -4$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی تابع) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» - نمودار گزینه «۱» چنین خاصیتی دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی توابع) (متوسط)

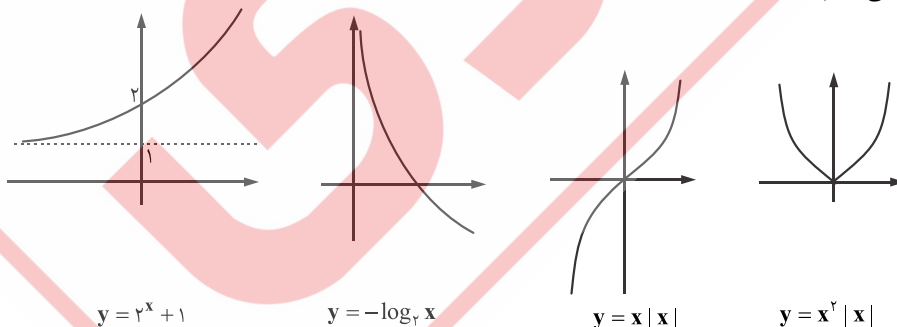
۲۰- گزینه «۴» - شیب این خط باید منفی باشد.

$$\frac{2m-m}{(m+1)-(m+3)} < 0 \Rightarrow \frac{m}{-2} < 0 \Rightarrow m > 0$$

بنابراین طول نقطه $(m, -m)$ مثبت و عرض آن منفی است پس در ناحیه چهارم قرار دارد.

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی تابع) (آسان)

۲۱- گزینه «۳» - نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم.



تابع $x|x|$ صعودی اکید و به درستی در گزینه‌ها آمده است. (نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۲۲- گزینه «۱» - چون تابع x^3 صعودی اکید است پس برای آن که $(1-k^3)x^3 + 1$ نزولی اکید باشد باید:

$$1-k^3 < 0 \Rightarrow k^3 > 1 \Rightarrow k > 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - یکنوایی) (متوسط)

۲۳- گزینه «۳» -

$$f \circ g = \{(5, 6), (6, 7)\} \Rightarrow (f \circ g) \circ (f \circ g) = \{(5, 7)\}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع) (آسان)

۲۴- گزینه «۱» - ضابطه تابع g را می‌نویسیم:

$$g: y = x + 1 \Rightarrow g(x) = x + 1$$

نقطه A نقطه مشترک دو تابع f و g است.

$$g(x_A) = \frac{1}{4} \Rightarrow x_A + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_A = -\frac{3}{4} \Rightarrow A\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

پس ضابطه f به صورت زیر است:

$$f: y = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}}x \Rightarrow f(x) = -\frac{x}{3}$$

$$(f \circ g)(\Delta) = f(g(\Delta)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$x^2 > x^2 \Rightarrow x^2(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$$

(نصیری) پایه دوازدهم - تابع - ترکیب دو تابع (متوسط)

۲۵- گزینه «۳» -

(نصیری) پایه دوازدهم - تابع - چند جمله‌ای‌ها (آسان)