ریاضیات

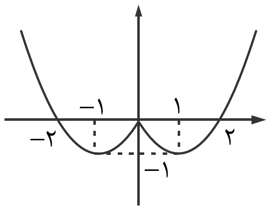
۱- گزینه «۱» ـ

$$fog(x) > 0 \Rightarrow f(g(x)) > 0 \Rightarrow \frac{1-g(x)}{1+g(x)} > 0 \Rightarrow -1 < g(x) < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

بخشی از جواب در گزینه (۱) آمده است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع ـ متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع غیریکنوا است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (آسان)

۳- گزینه «۲» ـ در تابع f ضریب x^2 را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$2a+1+1=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=-x-1 \Rightarrow f(x)+x=-x-1+x=-1$$

پس تابع $f(x)+x$ یک تابع ثابت است. (نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ تابع ثابت و خطی) (آسان)

۴- گزینه «۱» ـ برای آنکه معادله درجه دوم باشد باید x^3 از بین برود یعنی $m=1$ باشد، در این صورت معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$m=1 \Rightarrow 5x^2-24x-5=0 \Rightarrow (5x+1)(x-5)=0$$

ریشه بزرگ‌تر $x=5$ و عکس آن $\frac{1}{5}$ خواهد بود. (نصیری) (پایه دهم ـ معادله درجه دوم) (آسان)

۵- گزینه «۳» ـ

$$-\sqrt{x-2}+3=2x-1 \Rightarrow \sqrt{x-2}=4-2x \Rightarrow x-2=16-16x+4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2-17x+18=0 \Rightarrow (4x-9)(x-2)=0 \begin{cases} x=2 & \text{قابل قبول} \\ x=\frac{9}{4} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

طول نقطه برخورد $x=2$ است.

$$x=2 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(2,3) \Rightarrow |OA|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (آسان)

۶- گزینه «۳» ـ

$$12+3m=27 \Rightarrow 3m=15 \Rightarrow m=5 \Rightarrow g(x)=x^{10}-x^{10}-x^9-x \Rightarrow g(x)=-x^9-x$$

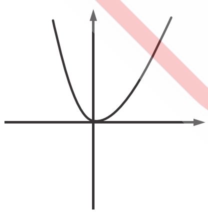
پس درجه g برابر ۹ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چند جمله‌ای‌ها) (آسان)

۷- گزینه «۱» ـ

$$x \ge 0 \Rightarrow f(x)=x^2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x)=|x+x|+x^2=x^2-2x$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که تابع در بازه $[0,+\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۸- گزینه «۲» ـ چون α ریشه معادله است، پس:

$$\alpha^{۲}=\alpha+۱ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^{۳}=\alpha^{۲}+\alpha \xrightarrow{\alpha^{۲}=\alpha+۱} \alpha^{۳}=\alpha+۱+\alpha=۲\alpha+۱$$

$$A=\alpha^{۳}+۲\beta-۱=۲\alpha+۱+۲\beta-۱=۲(\alpha+\beta)=۲(۱)=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ روابط بین ریشه‌ها) (دشوار)

۹- گزینه «۳» ـ

$$\alpha+\beta=\frac{۵}{۲} \qquad \alpha\beta=۱$$

$$x'=\frac{\alpha^{۶}+۱}{\alpha^{۳}}=\alpha^{۳}+\frac{۱}{\alpha^{۳}} \xrightarrow{\alpha\beta=۱} x'=\alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳PS=\frac{۱۲۵}{۸}-\frac{۱۵}{۲} \Rightarrow x'=\frac{۱۲۵-۶۰}{۸}=\frac{۶۵}{۸}$$

$$x''=\frac{\alpha^{۲}+۱}{\alpha}=\alpha+\frac{۱}{\alpha} \xrightarrow{\alpha\beta=۱} x''=\alpha+\beta=\frac{۵}{۲}$$

$$S_{new}=x'+x''=\frac{۶۵}{۸}+\frac{۵}{۲}=\frac{۶۵+۲۰}{۸}=\frac{۸۵}{۸}$$

$$P_{new}=x'x''=\frac{۶۵}{۸}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۳۲۵}{۱۶}$$

معادله جدید: $x^{۲}-\frac{۸۵}{۸}x+\frac{۳۲۵}{۱۶}=۰ \xrightarrow{\times۱۶} ۱۶x^{۲}=۱۷۰x-۳۲۵$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ روابط بین ریشه‌ها) (دشوار)

۱۰- گزینه «۴» ـ سهمی سمت راست را به صورت $y=a(x-۴)^{۲}$ در نظر میگیریم و نقطه $(۵,\frac{۱}{۴})$ را در آن صدق می‌دهیم.

$$\frac{۱}{۴}=a(۵-۴)^{۲} \Rightarrow a=\frac{۱}{۴} \Rightarrow y=\frac{۱}{۴}(x-۴)^{۲}$$

نقطه مشترک دو سهمی $(۰,۴)$ خواهد بود. معادله سهمی سمت چپ را به صورت $y=a(x+\frac{۱}{۲})^{۲}+۶$ در نظر می‌گیریم و نقطه $(۰,۴)$ را در آن صدق می‌دهیم:

$$۴=a(۰+\frac{۱}{۲})^{۲}+۶ \Rightarrow \frac{a}{۴}=-۲ \Rightarrow a=-۸ \Rightarrow y=-۸(x+\frac{۱}{۲})^{۲}+۶$$

حال صفرهای سهمی سمت چپ را پیدا می‌کنیم:

$$y=۰ \Rightarrow -۸(x+\frac{۱}{۲})^{۲}+۶=۰ \Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۳}{۴} \xrightarrow{x<۰} x+\frac{۱}{۲}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x=\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

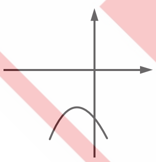
(نصیری) (پایه یازدهم ـ سهمی) (دشوار)

۱۱- گزینه «۳» ـ

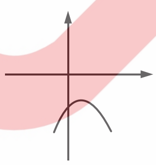
$$b>a+c \Rightarrow a-b+c<۰ \Rightarrow f(-۱)<۰$$

$$b^{۲}<۴ac \Rightarrow b^{۲}-۴ac<۰ \Rightarrow \Delta<۰$$

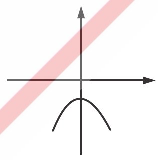
چون $\Delta<۰$ و $f(-۱)<۰$ است، پس کل سهمی زیر محور xها قرار دارد در این صورت $a<۰$ و $c<۰$ خواهد بود. و یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد.



$a<۰, c<۰, b<۰$



$a<۰, c<۰, b>۰$



$a<۰, c<۰, b=۰$

با توجه به اطلاعات بالا ($bc>۰$) نادرست است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ سهمی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۱» ـ اگر سرعت برگشت را V فرض کنیم سرعت رفت $V+۵$ خواهد بود.

$$t_{۱}+t_{۲}+t_{۳}=۲۰\times\frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \frac{۲}{V}+\frac{۲}{V+۵}+\frac{۶}{۶۰}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲(\frac{۱}{V}+\frac{۱}{V+۵})=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{۲(۲V+۵)}{V(V+۵)}=\frac{۷}{۳۰} \Rightarrow ۷V(V+۵)=۶۰(۲V+۵)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها $V=۱۵$ به دست می‌آید. (نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ معادلات گویا) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» ـ

$$\frac{x-2}{(x-2)(2x-1)}-\frac{x-3}{(x-3)(3x-1)}=\frac{2}{15} \Rightarrow \frac{1}{2x-1}-\frac{1}{3x-1}=\frac{2}{15}$$

$$\frac{3x-1-2x+1}{(2x-1)(3x-1)}=\frac{2}{15} \Rightarrow 2(6x^2-5x+1)=15x \Rightarrow 12x^2-25x+2=0 \Rightarrow (x-2)(12x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{1}{12} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$144x^2=144\times\frac{1}{144}=1$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ معادله گویا) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ـ زیر رادیکال‌ها نباید منفی باشند:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ 1-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x=1$$

فقط $x=1$ می‌تواند جواب باشد، آن را امتحان می‌کنیم.

$$x=1 \Rightarrow \sqrt{4-0}+\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}$$ (صدق نمی‌کند.)

پس معادله فاقد جواب حقیقی است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ معادلات ـ معادله گنگ) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» ـ اگر معادله $4x^2+bx+c=0$ دو ریشه حقیقی متمایز و مخالف $\frac{1}{4}$ داشته باشد تعیین علامت آن به صورت زیر خواهد بود:

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
p(x)	−	۰	+	۰	−	۰	+

و مجموعه جواب نامعادله $p(x)<0$ نمی‌تواند $x<-4$ باشد. اگر معادله فوق ریشه مضاعف -4 بدهد آن‌گاه:

x	$-\infty$	-4		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
p(x)	−	۰	−	۰	+

و نمی‌توان جواب به صورت $(-\infty, -4)$ باشد. فقط یک حالت برای این سوال میسر است که معادله $4x^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه -4 و $\frac{1}{4}$ باشد در این صورت:

$$p(x)=(4x-1)(4x-1)(x-4)=(4x-1)^2(x-4)$$

x	$-\infty$	-4		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
p(x)	−	۰	+	۰	+

و جواب نامعادله‌ی $p(x)<0$ به صورت $x<-4$ خواهد بود.

$$(4x-1)(x+4)=4x^2+15x-4 \Rightarrow \begin{cases} b=15 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow b+c=11$$

(نصیری) (پایه دهم ـ نامعادله) (دشوار)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{31}{8} \Rightarrow \frac{-(1-16m)}{-4m}=\frac{-31}{8} \Rightarrow \frac{1-16m}{4m}=\frac{-31}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1-16m}{m}=\frac{-31}{2} \Rightarrow 2-32m=-31m \Rightarrow m=2 \Rightarrow y=x^2+4x-2 \Rightarrow \frac{-b}{2a}=-2$$

پس خط تقارن $x=-2$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ سهمی) (آسان)

۱۷- گزینه «۱» ـ نامعادله فقط برای $x>0$ جواب دارد.

$$|x^2+3x|<2x \xrightarrow{x>0} |x+3|<2 \Rightarrow -2<x+3<2 \Rightarrow 0<x+5<4 \xrightarrow{(x+5)\in\mathbb{N}} (x+5)\in\{1,2,3\}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ نامعادله قدرمطلق) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ

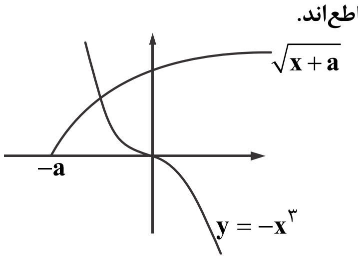
$$\begin{cases} x+\sqrt{y-۳}=۲ \\ \sqrt{y-۳}=x^۲ \end{cases} \xrightarrow{-} x^۲+x=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$$x=۱ \Rightarrow \sqrt{y-۳}=۱ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow xy=۴$$

$$x=-۲ \Rightarrow \sqrt{y-۳}=۴ \Rightarrow y=۱۹ \Rightarrow xy=-۳۸$$

(نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ برابری زوج مرتب) (دشوار)

۱۹- گزینه «۱» ـ اگر دو تابع را رسم کنیم خواهیم دید که برای $a>\circ$ دو تابع در یک نقطه با طول منفی متقاطع‌اند.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای) (آسان)

۲۰- گزینه «۲» ـ چون نمودار از تبدیل تابع $x^۳$ ساخته شده است پس ضابطه آن به صورت $a(x+۲)^۳+۲$ خواهد بود.

$$ax(x^۲+۶x+۱۲)+۸a+b=a(x+۲)^۳+b$$

با مقایسه، $b=۲$ به دست می‌آید. که از طرفی تابع f محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کرده است.

$$f(\circ)=۴ \Rightarrow a(\circ+۲)^۳+۲=۴ \Rightarrow ۸a=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$f(x)=\circ \Rightarrow \frac{۱}{۴}(x+۲)^۳+۲=\circ \Rightarrow (x+۲)^۳=-۸$$

$$\Rightarrow x+۲=-۲ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow m=-۴$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع چند جمله‌ای ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۲۱- گزینه «۴» ـ چون تابع $x^۳+۲$ صعودی اکید است پس برای نزولی اکید بودن f باید ضریب $x^۳$ منفی باشد.

$$\frac{a-۱}{a-۳}<\circ \Rightarrow ۱<a<۳ \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a=۲$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی توابع) (آسان)

۲۲- گزینه «۳» ـ تابع در سه بازه $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,+\infty)$ صعودی اکید است، اما در دامنه خود غیر یکنوا است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ یکنوایی) (متوسط)

۲۳- گزینه «۲» ـ

$$x=\circ \Rightarrow f^۲(\circ)f(g(\circ))=۱ \Rightarrow f^۲(\circ)f(۱)=۱ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{f^۲(\circ)}$$

$$x=۱ \Rightarrow f^۲(۱)f(g(۱))=۲ \Rightarrow f^۲(۱)f(\circ)=۲$$

$$\left(\frac{۱}{f^۲(\circ)}\right)^۲ f(\circ)=۲ \Rightarrow \frac{۱}{f^۳(\circ)}=۲ \Rightarrow f(\circ)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (دشوار)

۲۴- گزینه «۳» ـ

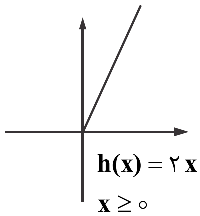
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

اشتراک دامنه‌های به دست آمده $[0, +\infty)$ است.

$$h(x) = (fog)(x) + (gof)(x) = f(\sqrt{x}) + g(x^2) = x + |x|$$

چون دامنه تابع h برابر $[0, +\infty)$است پس $h(x) = 2x$ خواهد بود.



$h(x) = 2x$

$x \geq 0$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۵- گزینه «۴» ـ مفهوم این سوال این است که ریشه‌های معادله $(gof)(x) = (fog)(x)$ را حساب کنیم

$$(fog)(x) = (gof)(x) \Rightarrow 2(x^2 + x) - 1 = (2x - 1)^2 + 2x - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

بزرگ‌ترین جواب بدست آمده $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (آسان)