

ریاضی

۱- گزینه «۳» - می‌دانیم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در دامنه خود با شرط $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ به یک تابع ثابت که هم صعودی و هم نزولی می‌باشد تبدیل می‌گردد و داریم:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow a = b$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع - تابع ثابت) (متوسط)

۲- گزینه «۱» - می‌بایستی X و Y اعدادی صحیح باشند:

$$y = 0 \Rightarrow x = -32 \checkmark$$

$$y = \pm 1 \Rightarrow (x \text{ غ ق})$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow x = \frac{32}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$y = \pm 3 \Rightarrow x = \frac{32}{8} = 4 \checkmark \Rightarrow f = \{(-32, 0), (4, 3), (4, -3)\}$$

$$y = \pm 4 \Rightarrow x = \frac{32}{16} \notin \mathbb{Z}$$

$$y = \pm 5 \Rightarrow x = \frac{32}{20} \notin \mathbb{Z}$$

که حداقل با حذف یکی از زوج مرتبها با عضو اول ۴، تابع f تعریف می‌شود.

(سراسری با تغییر) (پایه دهم - تابع - مفهوم تابع) (دشوار)

۳- گزینه «۳» - می‌بایستی نمودار سهمی بر محور طولها مماس بوده یا پایین محور طولها باشد که داریم:

$$1) a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1, (1)$$

$$2) \Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta = 4(m-3)^2 + 4(1-m) \leq 0 \Rightarrow (m-3)^2 + (1-m) \leq 0$$

$$\Delta = m^2 - 6m + 9 + 1 - m = m^2 - 7m + 10 = (m-2)(m-5) \leq 0$$

m	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Δ	+	•	-	+
		+	-	+

با اشتراک (۱) و (۲) به بازه جواب $[2, 5]$ می‌رسیم، که شامل اعداد طبیعی $A = \{2, 3, 4, 5\}$ خواهد بود.

(حاتمی) (پایه دهم - تابع درجه دوم - سهمی) (دشوار)

۴- گزینه «۴» - به کمک نامعادله $\frac{1-x}{x-3} \geq 0$ به جواب بازه $[1, 3)$ می‌رسیم و در این بازه وضعیت مثبت یا منفی بودن هر یک از قدر مطلقهای تابع $f(x)$ را معلوم می‌کنیم:

$$x \in [1, 3) \Rightarrow f(x) = -(2x-6) + x + 1 = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

سپس با تابع $g(x)$ تقاطع می‌دهیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x + 7 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

معادله تقاطع دارای دو ریشه حقیقی $x_1 = 1$ یا $x_2 = -5$ می‌باشد که فقط $x_1 = 1$ متعلق به بازه $[1, 3)$ می‌باشد.

(حاتمی) (پایه دهم - نامعادله) (متوسط)

$$5- \text{گزینه «۲» - با توجه به } P = \frac{c}{a} = 1 \text{ و } S = \frac{-b}{a} = 4 \text{ داریم:}$$

$$\sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{S+2\sqrt{P}} = \sqrt{6}$$

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{S-2\sqrt{P}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6}$$

(حاتمی) (پایه یازدهم - روابط متقارن بین ریشه‌ها) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - با تعیین $s = \frac{-b}{a} = -m$ و $p = \frac{c}{a} = m+7$ ، برای $x'^2 + x''^2 = 10$ داریم:

$$s^2 - 2p = 10 \Rightarrow (-m)^2 - 2(m+7) = 10 \Rightarrow m^2 - 2m - 14 = 10$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (m+4)(m-6) = 0 \Rightarrow m = -4 \text{ یا } m = 6$$

به ازای $m = 6$ به معادله $x^2 + 6x + 13 = 0$ می‌رسیم که در آن $\Delta < 0$ بوده و معادله

ریشه حقیقی ندارد ولی به ازای $m = -4$ در معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ ، معادله دارای دو ریشه حقیقی خواهد بود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - معادله درجه دوم - روابط متقارن بین ریشه‌ها) (متوسط)

۷- گزینه «۱» - دامنه طرف اول رادیکالها به صورت اشتراک $x \geq 1$ و $x \leq 2$ یعنی

بازه $1 \leq x \leq 2$ می‌باشد. از طرفی چون جمع دو عبارت مثبت است در طرف دیگر معادله می‌بایستی $x - 4 \geq 0$ و $x \geq 4$ باشد که با شرط قبلی سازگار نبوده و معادله ریشه حقیقی ندارد.

(حاتمی) (پایه یازدهم - معادله گنگ - تعیین علامت دامنه) (آسان)

۸- گزینه «۳» - با انتخاب تغییر متغیر $t = x^3 + 1$ داریم:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(2t-1) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

$$x^3 + 1 = 2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^3 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

معادله دارای ۲ ریشه حقیقی خواهد بود.

(حاتمی) (پایه یازدهم - معادلات گویا - تغییر متغیر) (متوسط)

۹- گزینه «۲» - در رابطه $y = 1$ و $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{1}$ به معادله $x^2 - x - 1 = 0$ می‌رسیم.

(حاتمی) (پایه یازدهم - معادلات گویا - مستطیل طلایی) (آسان)

۱۰- گزینه «۴» - می‌بایستی معادله گویا $\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{k}$ دارای جواب $t = 6$ یعنی کمترین زمان لازم برای کار تنهایی یکی از ماشین‌ها، باشد که داریم:

$$t = 6 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 4$$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه یازدهم - معادله گویا - مسائل کاربردی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۱» - چون ضریب بزرگ‌ترین درجه x یعنی x^3 مثبت می‌باشد نمودار از سمت راست از بالای محور طولها شروع شده و نمودارهای «۱ و ۳» می‌توانند درست باشند. نگاه دوم به عرض از مبدا است که با جایگزینی $x = 0$ در معادله به عرض از مبدا $y = 1$ می‌رسیم و در هر دو گزینه فوق صادق است. در نگاه سوم با تبدیل به شکل مکعب کامل داریم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$$

در این شکل از ضابطه ریشه داخل عبارت درجه سوم نقطه‌ای است که جهت تقعر یا گودی نمودار عوض می‌شود یعنی $x = 1$ که به ازای آن $y = 2$ و نقطه مورد نظر $A(1, 2)$ در

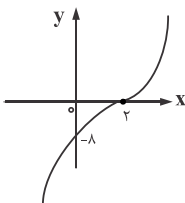
گزینه «۱» است. به راحتی می‌توانستیم در معادله درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

و $a \neq 0$ طول نقطه فوق را $x = \frac{-b}{3a}$ تعریف کنیم و نیازی به تبدیل مکعب کامل نباشد.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع درجه سوم - نمودار درجه سوم) (متوسط)

۱۲- گزینه «۳» - معادله درجه سوم $(x-2)^3 = 0$ دارای ۳ ریشه حقیقی یکسان یعنی $x = 2$ می‌باشد که به آن می‌توانیم یک ریشه مکرر از مرتبه سوم بگوییم بنابراین $m = 3$ می‌باشد.

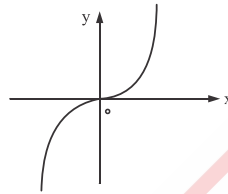
از طرفی نمودار تابع $y = (x-2)^3$ تنها در یک نقطه محور طولها را قطع کرده و $n = 1$ است که مطابق نمودار آن داریم:



(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع درجه سوم - نمودار و ریشه‌ها) (دشوار)

۱۳- گزینه «۱» - با توجه به شناختی که از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x|x|$ داریم که شبیه به تابع درجه سوم $y = x^3$ می‌باشد، گزینه «۱» درست خواهد بود.

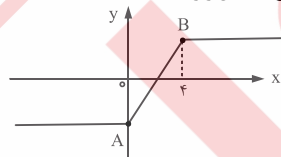
$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$



با سایر نمودارها نیز در کتاب درسی آشنا هستیم.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع صعودی و نزولی - نمودار) (متوسط)

۱۴- گزینه «۴» - ابتدا می‌دانیم $|x - 4| = 4 - x$ و به تابع $f(x) = |x| - |x - 4|$ می‌رسیم؛ در تابع با ضابطه $f(x) = |x - a| - |x - b|$ که به نمودار آشنایی معروف است در بازه بین ریشه‌های قدرمطلقها یعنی (a, b) تابع یکنوا است. یعنی بازه $(0, 4)$ که طول بازه برابر $b - a = 4$ می‌باشد. از طرفی نمودار تابع به شکل زیر است:



$$f(x) = |x| - |x - 4|$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(0, -4) \\ x = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(4, 4) \end{cases}$$

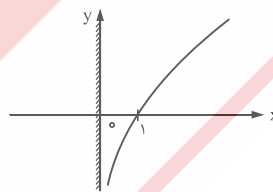
(حاتمی) (پایه دوازدهم - توابع صعودی و نزولی - اکیدا یکنوا - نمودار) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» - نمودار تابع $f(x)$ اکیدا صعودی بوده و مطابق تعریف این توابع خواهیم داشت:

$$(f \circ f)(x) < f(x) \Rightarrow f(f(x)) < f(x) \Rightarrow f(x) < x$$

$$\Rightarrow x + \log x < x \Rightarrow \log x < 0$$

حال با استفاده از نمودار تابع لگاریتم داریم:



نمودار در بازه $x \in (0, 1)$ منفی بوده و فاقد عدد صحیح است.

(سرآسی ۱۴۰۲ با تغییر) (پایه یازدهم - تابع صعودی و نزولی - مفهوم تابع اکیدا صعودی) (دشوار)

۱۶- گزینه «۲» - چون $0 \leq f < 1$ و تابع $g(x)$ نیز اکیدا صعودی است، اجازه داریم مقادیر ابتدا و انتهای f را در تابع $g(x)$ قرار داده و برد تابع مرکب $g \circ f$ را به دست آوریم.

$$g \circ f = g(f) = g(0) = 3^0 = 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = [1, 3)$$

$$g \circ f = g(f) = g(1) = 3^1 = 3$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - توابع صعودی و نزولی - ویژگی تابع اکیدا یکنوا در برد تابع) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» - با تعیین $x = \frac{-b}{2a}$ داریم و مقایسه آن با $x = -2$ داریم:

$$y = 3x^2 + ax + 1$$

$$x = \frac{-a}{6} = -2 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow y = 3x^2 + 12x + 1$$

می‌دانیم سهمی در $y = k$ که همان عرض رأس سهمی می‌باشد براین خط افقی مماس خواهد بود:

$$f(-2) = 12 - 24 + 1 = -11$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - توابع صعودی و نزولی - سهمی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» - مطابق جدول زیر و تعریف تابع صعودی

$$\forall a, b \in D_f, a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

خواهیم داشت:

x	-۲	۳	۷
y	۵	۱۱	۳m+۲

$$3m+2 \geq 11 \Rightarrow 3m \geq 9 \Rightarrow m \geq 3$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع صعودی و نزولی - تعریف تابع صعودی) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» - با تشکیل تابع مرکب $f \circ f(x)$ داریم:

$$f(x) = 2x + a \Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2x + a) = 2(2x + a) + a = 4x + 3a$$

و با مقایسه آن خواهیم داشت:

$$4x + 3a = 4x + 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \left[\frac{2a}{a+3} \right] = \left[\frac{2}{4} \right] = 0$$

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع مرکب - تشکیل تابع مرکب) (آسان)

۲۰- گزینه «۳» - با ورودی $x = 4$ حاصل ماشین اول برابر ۹ بوده و در ماشین دوم مقدار

خروجی برابر $\frac{3}{11}$ خواهد شد.

(حاتمی) (پایه دهم - تابع) (متوسط)

۲۱- گزینه «۳» - مقدار تابع g در نقطه $f(a)$ برابر ۱۲ بوده و مطابق داده‌های تابع g

می‌بایستی $f(a) = 3$ باشد که خواهیم داشت:

$$f(x) = x + \sqrt{x} = 3$$

و بدون حل معادله گنگ و با جایگزینی جوابها به عدد $a = 25$ می‌رسیم که در معادله فوق صدق می‌کند.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع مرکب - تابع مرکب) (متوسط)

۲۲- گزینه «۲» - ابتدا به کمک $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ داریم:

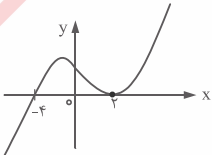
$$f(2x-1) = \frac{x}{x-3}$$

بدون محاسبه ضابطه $f(x)$ با انتخاب تساوی $2x-1=3$ به $x=2$ می‌رسیم و خواهیم داشت:

$$x=2 \Rightarrow f(3) = \frac{2}{-1} = -2$$

(سرآسی ۹۱) (پایه دوازدهم - تابع مرکب - ضابطه تابع مرکب) (متوسط)

۲۳- گزینه «۱» - معادله حاصل از تابع دارای ریشه ساده $x = -4$ و ریشه مضاعف $x = 2$ بوده و مطابق نمودار در بازه $[2, +\infty)$ صعودی اکید و $a = 2$ خواهد بود.



(حاتمی) (پایه دوازدهم - تابع درجه سوم - نمودار) (متوسط)

۲۴- گزینه «۳» - می‌دانیم تابع لگاریتمی در پایه $\frac{1}{4}$ نزولی بوده و اگر $u(x)$ نیز نزولی باشد

ترکیب توابع به صورت $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(u(x))$ ؛ اکیدا صعودی است بنابراین گزینه «۳» صحیح خواهد بود.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - توابع مرکب - یکنوایی اکید صعودی) (متوسط)

۲۵- گزینه «۴» - درجه چند جمله‌ای برابر ۱۴ که همان بزرگ‌ترین توان حاصل است و در بسط

دو جمله‌ای $(a+b)^n$ و $n \in \mathbb{N}$ ؛ تعداد جملات $(n+1)$ خواهد بود که در این‌جا ۸ جمله

بوده و مجموع $14+8=22$ می‌گردد.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - چند جمله‌ای‌ها - درجه و جملات) (آسان)