ریاضیات

۱- گزینه «۳» ـ

$$y = x^{۳} - ۲۱x^{۲} + ۱۴۷x - ۳۴۷ = (x - ۷)^{۳} - ۴$$

بنابراین برای رسم نمودار داده شده کافی است نمودار $y = x^{۳}$ را ۷ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال دهیم.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تابع درجه ۳)

۲- گزینه «۴» ـ

$$y = ax^{۳} + x^{۳} - ۳bx^{۲} + ۳b^{۲}x - b^{۳} + x^{۲} - ۲cx + c^{۲} + d = (a+۱)x^{۳} + (۱-۳b)x^{۲} + (۳b^{۲} - ۲c)x - b^{۳} + c^{۲} + d$$

با توجه به نمودار داده شده، تابع خطی است، بنابراین ضرایب $x^{۲}$ و $x^{۳}$ صفر است.

$$\begin{cases} a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \\ ۱ - ۳b = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

شیب نمودار برابر است با $\frac{۱}{۳}$. در نتیجه:

$$۳b^{۲} - ۲c = \frac{۱}{۳} \Rightarrow c = ۰$$

عرض از مبدأ برابر است با ۱−. بنابراین:

$$-b^{۳} + c^{۲} + d = -۱ \Rightarrow d = -\frac{۲۶}{۲۷}$$

در نتیجه:

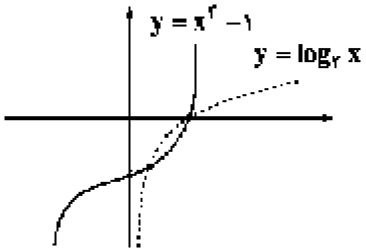
$$-a + b + c + d = ۱ + \frac{۱}{۳} + ۰ - \frac{۲۶}{۲۷} = \frac{۱۰}{۲۷}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تابع خطی)

۳- گزینه «۳» ـ

$$x^{۳} - \log_{۲}^{x} = ۱ \Rightarrow x^{۳} - ۱ = \log_{۲} x$$

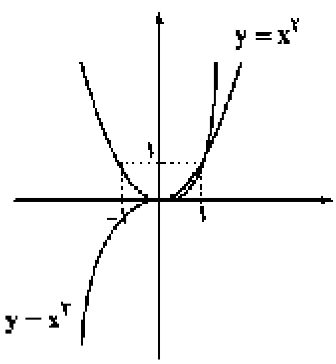
کافی است نمودارهای توابع $y = \log_{۲} x$ و $y = x^{۳} - ۱$ را رسم کنیم. محل‌های برخورد دو تابع، ریشه‌های معادله هستند.



همان‌طور که در شکل می‌بینیم، معادله دارای دو ریشه است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تابع درجه ۳)

۴- گزینه «۱» ـ

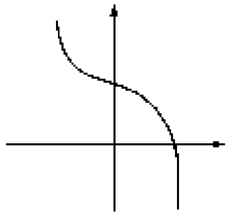
$$x^{۲} - x^{۳} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \geq x^{۳}$$



با کمک نمودار توابع $y = x^{۲}$ و $y = x^{۳}$، در می‌یابیم به‌ازای $x \leq ۱$، $x^{۲} \geq x^{۳}$ است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تابع درجه ۳)

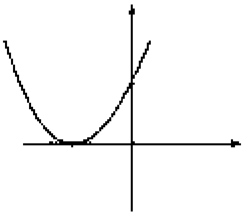
۵- گزینه «۲» ـ نمودار درست گزینه‌های دیگر را رسم می‌کنیم:
گزینه «۱»:

$y=-(x^۳-۱)$



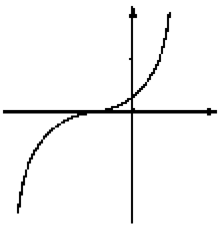
گزینه «۳»:

$y=|x+۱|^۳$



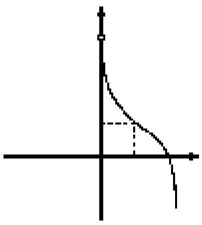
گزینه «۴»:

$y=(x+۱)^۳$

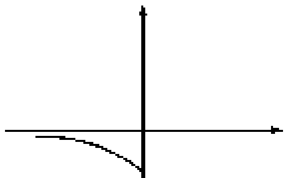


(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تابع درجه ۳)

۶- گزینه «۱» ـــ تـابع $y=a(x-۱)^۳+۱;\ ۰<x\le\frac{۳}{۲}$ بـه‌ازای $a\in(-\infty,۰)$ اکیـداً نزولـی خواهـد بـود. (شـکل ۱) تـابع $y=\frac{a}{|۱-x|};x\le ۰$ به‌ازای $a\in(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی است. (شکل ۲)



شکل ۱



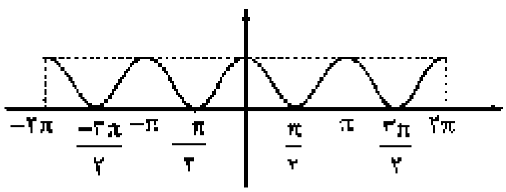
شکل ۲

اما با توجه به این که تابع f اکیداً نزولی و در نتیجه یک به یک است، مقدار $y=a(x-۱)^۳+۱$ در $x=\frac{۳}{۲}$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. بنابراین:

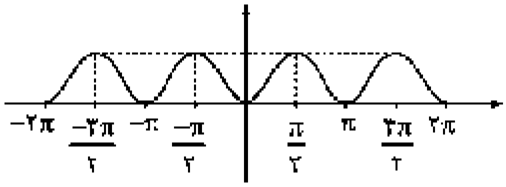
$$y=a(x-۱)^۳+۱\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}y=\frac{a}{۸}+۱\xrightarrow{y\ge ۰}a\ge -۸\Rightarrow a\in(-\infty,۰)\cap[-۸,+\infty)=[-۸,۰)$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۷- گزینه «۱» ـ نمودارهای دو تابع را رسم می‌کنیم:



$y=\cos^۲ x$

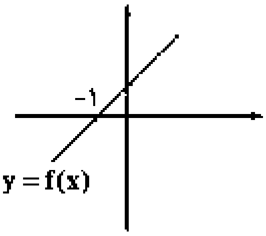


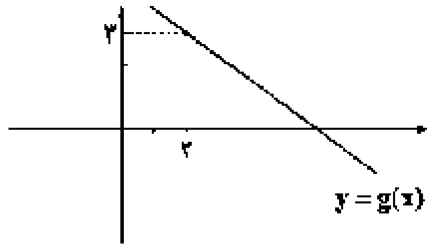
$y=\sin^۲ x$

همان‌طور که در نمودارها مشخص است، دو تابع در هیچ بازه‌ای هم زمان نزولی نیستند.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۸- گزینه «۲» ـ روش اول: برای تابع f و g یک مثال می‌زنیم و به کمک آن دامنه y را تعیین می‌کنیم:





$$y=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)-۳}} \Rightarrow D_y=\begin{cases} f(x)\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۱ \\ g(x)>۳ \Rightarrow x<۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱\le x<۲$$

روش دوم: تابع f اکیداً صعودی است، پس طبق تعریف داریم:

$$x_۲<x_۱ \Rightarrow f(x_۲)<f(x_۱)$$

بنابراین به‌ازای هر x که $x<-۱$ باشد، داریم $f(x)<f(-۱)=۰$ یعنی اگر $x\ge -۱$ باشد، آن‌گاه $f(x)\ge ۰$ است.

تابع g اکیداً نزولی است. پس:

$$x_۲<x_۱ \Rightarrow g(x_۲)>g(x_۱)$$

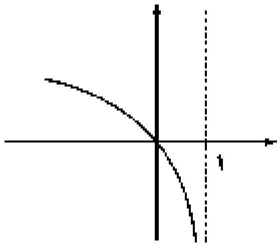
بنابراین به‌ازای هر x که $x<۲$ باشد، داریم $g(x)>g(۲)=۳$ در نتیجه دامنه y برابر است با:

$$\{x\ge -۱\}\cap\{x<۲\}=-۱\le x<۲$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

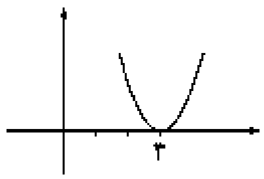
۹- گزینه «۲» ـ نکته: اگر f و g دو تابع صعودی(نزولی) باشند، $f+g$ نیز صعودی (نزولی) است.

تابع $f(x)=\log_۲(۱-x)$ یک تابع نزولی است. (توجه کنید که دامنه f برابر است با: $(D_f=(-\infty\,,\,۱)$



تابع $g(x)=(x-۳)^۲$، نه صعودی است و نه نزولی. اما با توجه به این که دامنه y برابر است با: $D_y=D_f\cap D_g=(-\infty\,,\,۱)$

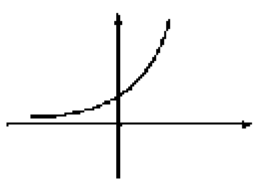
پس تابع g در دامنه $(-\infty\,,\,۱)$ نزولی خواهد شد.

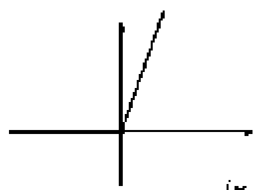


بنابراین با توجه به نکته گفته شده تابع y، نزولی است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ درس اول ـ فصل اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۰- گزینه «۲» ـ نکته: اگر f اکیداً صعودی و g صعودی باشد، $f+g$ اکیداً صعودی است.

از آن‌جا که $f(x)=۳^x$ اکیداً صعودی و $g(x)=x+|x|$ صعودی است، طبق نکته گفته شده y اکیداً صعودی خواهد بود.





$$y=g(x)=x+|x|=\begin{cases} ۲x & x\ge ۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases}$$

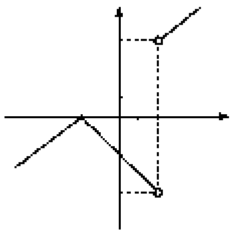
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۱- گزینه «۴» ـ ابتدا عبارت $x^۲-۴$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲-۴$		$+$	۰		۰	$+$	

در نتیجه:

$$|x^۲-۴|=\begin{cases} x^۲-۴ & x\ge ۲ \text{ یا } x\le -۲\\ -(x^۲-۴) & -۲<x<۲\end{cases} \Rightarrow y=\frac{|x^۲-۴|}{x-۲}=\begin{cases}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲ & x>۲ \text{ یا } x\le -۲\\ \dfrac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-(x+۲) & -۲<x<۲\end{cases}$$



بنابراین تابع در بازه $(-\infty,-۲]\cup(۲,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $[-۲,۲)$ اکیداً نزولی است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$gof(x)=g(f(x))=۳(\sqrt{۲-x})^۲+۱=۷-۳x$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,۲] \mid \sqrt{۲-x}\in\mathbb{R}\}=(-\infty,۲]$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع)

۱۳- گزینه «۳» ـ صفرهای تابع $fog(x)$، یعنی xهایی که به‌ازای آن $f(x^۴-x^۲-\frac{۱}{۲})=۰$ است. از طرفی مطابق شکل $f(-\frac{۳}{۴})=۰$ است. پس:

$$x^۴-x^۲-\frac{۱}{۲}=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow x^۴-x^۲+\frac{۱}{۴}=۰ \xrightarrow{t=x^۲} t^۲-t+\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع، پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روش تغییر متغیر برای حل معادله)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$D_f=[-۱,۳]-\{۰\},\ D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid |\frac{x-۱}{۲}-۱|\in[-۱,۳]-\{۰\}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\frac{x-۱}{۲}-۱|\le ۳ \Rightarrow -۳\le\frac{x-۱}{۲}-۱\le ۳ \Rightarrow -۳\le x\le ۹\\ |\frac{x-۱}{۲}-۱|\ge -۱ \quad \text{همواره برقرار}\\ |\frac{x-۱}{۲}-۱|\ne ۰ \Rightarrow x\ne ۳\end{cases} \Rightarrow D_{fog}=[-۳,۳)\cup(۳,۹]$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع، پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ نامعادله‌های قدرمطلقی)

۱۵- گزینه «۱» ـ

$$f(x-۳)=x^۲-۶x \Rightarrow f(x)=(x+۳)^۲-۶(x+۳)=x^۲-۹$$

$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=g^۲(x)-۹\\ fog(x)=x-۱\end{cases} \Rightarrow g^۲(x)-۹=x-۱ \Rightarrow g(x)=\pm\sqrt{x+۸}$$

$$D_{fog}=\{x\in[-۸,+\infty) \mid g(x)\in\mathbb{R}\}=[-۸,+\infty)$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع)

۱۶- گزینه «۱» ـ با توجه به نمودار داریم:

$$D_f=\mathbb{R},\ D_{gof}=[-۵,۷]$$

بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \Rightarrow \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in D_g\}=[-۵,۷] \Rightarrow D_g=[-۶,۰]$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$s = ۲ , p = -۳$

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{α در معادله صدق می‌کند.}} α^۲ - ۲α - ۳ = ۰ \Rightarrow α(α - ۲) = ۳ \Rightarrow α - ۲ = \frac{۳}{α} \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{β در معادله صدق می‌کند.}} β^۲ - ۲β - ۳ = ۰ \xrightarrow{-۵} β^۲ - ۲β - ۸ = -۵ \Rightarrow (β + ۲)(β - ۴) = -۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \frac{۱}{β^۲}(α - ۲)^۲ + (β + ۲)(β - ۴) = \frac{۱}{β^۲}(\frac{۳}{α})^۲ - ۵ = \frac{۹}{p^۲} - ۵ = \frac{۹}{۹} - ۵ = -۴$$

(جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها)

۱۸- گزینه «۴» ـ با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\xrightarrow{\text{تابع دارای ریشه نیست.}} Δ < ۰ \Rightarrow Δ = ۴ + ۴ab < ۰ \Rightarrow ab < -۱ \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{\text{دهانه سهمی رو به پایین است.}} a < ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{f(۰)<۰} -b < ۰ \Rightarrow b > ۰ \quad (۳)$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»:

$ab = -\sqrt{۵} \times \frac{\sqrt{۵}}{۵} = -۱ \Rightarrow$ در شرط (۱) صدق نمی‌کند.

گزینه «۲»:

$ab = -۰/۳۵ \times ۰/۲۱ > -۱ \Rightarrow$ در شرط (۱) صدق نمی‌کند.

گزینه «۳»:

$a = ۰/۴۴ > ۰ , b = -۱۰ < ۰ \Rightarrow$ در شرط (۱) صدق می‌کند، (۲) و (۳) صدق نمی‌کند.

گزینه «۴»:

$$\begin{cases} ab = -۰/۵۶ \times ۳/۱ < -۱ \\ a < ۰ \\ b > ۰ \end{cases} \Rightarrow$$ در تمام شروط صدق می‌کند.

بنابراین گزینه «۴» درست است. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ سهمی، پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تابع درجه ۲)

۱۹- گزینه «۱» ـ

$$\sqrt{۲x + ۸} - x = ۴ \Rightarrow \sqrt{۲x + ۸} = ۴ + x \xrightarrow{\text{توان۲}} ۲x + ۸ = x^۲ + ۸x + ۱۶ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = -۴ , x = -۲$$

با توجه به دامنه معادله داده شده هر دو جواب قابل قبول هستند. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات رادیکالی)

۲۰- گزینه «۲» ـ

$$\frac{۱}{A} + \frac{۱}{B} + \frac{۱}{C} = \frac{۱}{۳}$$

A، B و C با هم در یک روز، $\frac{۱}{۳}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین پس از ۱۲ ساعت (یعنی $\frac{۱}{۲}$ روز)، $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{۱}{A} + \frac{۱}{B} = \frac{۱}{۶}$$

A و B با هم در یک روز، $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین بعد از ۳۰ ساعت (یعنی $\frac{۵}{۴}$ روز)، $\frac{۵}{۲۴}$ کار را انجام می‌دهند.

تا اینجا $\frac{۳}{۸} = \frac{۹}{۲۴} = \frac{۱}{۶} + \frac{۵}{۲۴}$ کار انجام شده و $\frac{۵}{۸}$ آن باقی مانده است، A این مقدار از کار را در ۵ روز انجام داده است، بنابراین:

روز	کار
۵	$\frac{۵}{۸}$
x	۱

$$\Rightarrow x = ۵ \times \frac{۸}{۵} = ۸$$

یعنی A به تنهایی کل کار را در ۸ روز تمام می‌کند. (جعفری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات کسری)

۲۱- گزینه «۳» ـ از آن‌جا که معادله دارای یک ریشه است، پس $Δ = ۰$:

$$Δ = m^۲ - ۴m + ۴ + ۸m = (m + ۲)^۲ = ۰ \xrightarrow{Δ=۰} m = -۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۴x + ۴$$

$$\xrightarrow{f(x)\geq ۱} x^۲ + ۴x + ۴ \geq ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۴x + ۳ \geq ۰ \Rightarrow x \in (-\infty , -۳] \cup [-۱ , +\infty)$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ تعیین علامت)

۲۲- گزینه «۴» ـ

$$A=\frac{f(x)(f^{۲}(x)-۳f(x)+۵)}{x(x-۳)(x-۱)}$$

عبارت $f^{۲}(x)-۳f(x)+۵$ همواره مثبت است، زیرا:

$$\begin{cases}\Delta=۹-۲۰<۰\\ a=۱>۰\end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را برای A رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۱		۳		$+\infty$
$f(x)$		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	۰	+	
$x^{۳}-۴x^{۲}-۳x$		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
A		−	۰	+	۰	−	ت‌ن	+	ت‌ن	+	ت‌ن	+	

$$\Rightarrow\ A>۰\ \Rightarrow\ (-۵,-۳)\cup(۰,۱)\cup(۱,۳)\cup(۳,+\infty)$$

(جعفری) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ تعیین علامت)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$(۳,m),(۳,m^{۲}-۶)\ \Rightarrow\ m=m^{۲}-۶\ \Rightarrow\ m^{۲}-m-۶=۰\ \Rightarrow\ m=-۲,m=۳$$

$$\xrightarrow{m=-۲}\ \{(۳,-۲)(-۲,۴)(۳,-۲)(-۲,-۲)\}$$

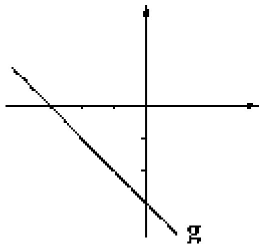
$(-۲,۴)$ و $(-۲,-۲)$ دارای مولفه‌های اول یکسان، اما مولفه‌های دوم متفاوت است، بنابراین رابطه تابع نیست.

$$\xrightarrow{m=۳}\ \{(۳,۳)(۳,۴)(۳,۳)(-۲,۳)\}$$

مجدداً به دلیل وجود $(۳,۴)$ و $(۳,۳)$ این رابطه هم تابع نخواهد بود. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ مفهوم تابع)

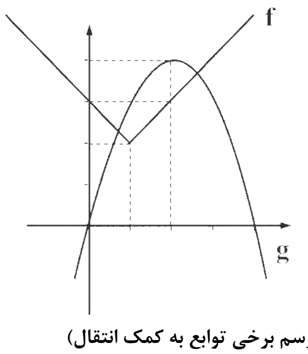
۲۴- گزینه «۱» ـ f تابع همانی است، بنابراین $f(۶)=۶$ و $f(۳)=۳$

$$\Rightarrow\ \frac{f(۶)}{f(۳)}=a+۳\ \Rightarrow\ \frac{۶}{۳}=a+۳\ \Rightarrow\ a=-۱\ \Rightarrow\ g(x)=-x-۳$$



(جعفری) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ انواع توابع)

۲۵- گزینه «۲» ـ نمودار دو تابع را با هم رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. (جعفری) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ درس سوم ـ رسم برخی توابع به کمک انتقال)