ریاضیات

۱- گزینه «۲» ـ

$$||x^2-3x|-2|<2 \Rightarrow -2<|x^2-3x|-2<2 \xrightarrow{+2} 0<|x^2-3x|<4$$

$$x^2-3x\neq 0 \Rightarrow x(x-3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,3$$

$$|x^2-3x|<4 \Rightarrow x^2-3x<+4,\ x^2-3x>-4$$

$x^2-3x-4<0$

		-1		4	
x^2-3x-4	+	0	−	0	+

$\Rightarrow x\in(-1,4)$ I

$x^2-3x+4>0 \qquad \Delta=9-4\times4<0$ بهازای تمامی مقادیر x برقرار است.

جواب نامعادله بازه $(-1,4)-\{0,3\}$ است. (اللهدادی) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله و نامعادله ـ نامعادله قدرمطلق)

۲- گزینه «۱» ـ

$x^2+1\rightarrow$ همواره مثبت $\qquad x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm3 \qquad -x^2+3x+10=0 \Rightarrow x=5,-2$

		-3		-2		3		5	
x^2+1	+		+		+		+		+
x^2-9	+		−		−		+		+
$-x^2+3x+10$	−		−		+		+		−
$P(x)$	−	0	+	ت.ن	−	0	+	ت.ن	−

(اللهدادی) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله و نامعادله ـ تعیین علامت)

۳- گزینه «۱» ـ

$$f(x)=\frac{3ax^4+2bx^3}{6x^3-3x^2}=\frac{x^3(3ax+2b)}{x^2(6x-3)} \Rightarrow f(x)=x\left(\frac{3ax+2b}{6x-3}\right)$$

میدانیم ضابطه تابع همانی باید بهصورت $f(x)=x$ باشد. لذا بهازای هر x باید $\frac{3ax+2b}{6x-3}$ برابر یک باشد:

$$\frac{3ax+2b}{6x-3}=1 \Rightarrow 3ax+2b=6x-3 \Rightarrow \begin{cases}3a=6 \Rightarrow a=2\\ 2b=-3 \Rightarrow b=\frac{-3}{2}\end{cases} \Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

(اللهدادی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ انواع تابع)

۴- گزینه «۳» ـ

$$(f(2))^2-g(6)=5f(5) \Rightarrow (f(2))^2-6=5f(5) \xrightarrow{f(x)=c} c^2-5c-6=0$$

$$c=\frac{5\pm\sqrt{\overset{7}{\cancel{25+24}}}}{2}=\begin{cases}6\\-1\end{cases}$$

$$g_{(5)}+f_{(5)}=\begin{cases}5+6=11\\5-1=4\end{cases}$$

تنها عدد ۱۱ در گزینهها موجود میباشد. (اللهدادی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ انواع تابع)

۵- گزینه «۳» ـ

$x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x	+	−	+	

$\Rightarrow -1<x<0$

$$\left.\begin{array}{l}-1<x<0 \Rightarrow -1<x^3<0 \Rightarrow [x^3]=-1\\ -1<x<0 \Rightarrow 0<x^{30}<1 \Rightarrow [x^{30}]=1\end{array}\right\} \Rightarrow [x^3]+[x^{30}]=0$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۸) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ توابع پلهای و تابع جزء صحیح)

۶- گزینه «۲» ـ

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a},\ x_1.x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1+x_2=3,\ x_1.x_2=4$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=A \Rightarrow A^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2} \Rightarrow A^2=3+2\times2=7 \Rightarrow A=\sqrt{7}$$

$$x_1^2-3x_1+4=0 \Rightarrow x_1^2=3x_1-4 \Rightarrow x_1^4=9x_1^2+16-24x_1$$

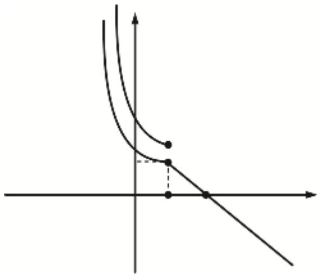
$$x_1^4+x_2^4=9(x_1^2+x_2^2)-24(x_1+x_2)+32=9\times1-24\times3+32=-31$$

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2=(3)^2-2\times4=9-8=1$$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+x_1^4+x_2^4=\sqrt{7}-31$$

(اللهدادی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ حاصلضرب و جمع ریشههای معادله درجه دوم)

۷- گزینه «۲» ـ شرط وارون‌پذیری یک‌به‌یک بودن تابع است، بنابراین:



طبق نمودار تابع $y=-x^{۳}+a$ همواره باید بالاتر از تابع $y=-x+۲$ قرار بگیرد:

$$-(۱)^{۳}+a \ge -۱+۲ \quad a \ge ۲$$

(اللهدادی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ تابع یک‌به‌یک)

۸- گزینه «۲» ـ شرط تساوی دو تابع:

$$D_{f(x)}=D_{g(x)}\ ,\ f(x)=g(x)$$

برای آن‌که دامنه تابع $g(x)$ با دامنه تابع $f(x)$ برابر باشد، مخرج تابع $f(x)$ باید دارای ریشه مضاعف باشد:

$$\Delta=۰ \Rightarrow b^{۲}-۴ac=۰ \Rightarrow ۱۰۰-۴\times c=۰ \Rightarrow c=۲۵$$

$$f(x)=\frac{۳x+b}{x^{۲}-۱۰x+۲۵}=\frac{۳x+b}{(x-۵)^{۲}}$$

بنابراین $x=۵$ باید ریشه صورت کسر هم باشد:

$$۳\times۵+b=۰ \Rightarrow b=-۱۵$$

چون $D_f=D_g\ ,\ D_f=R-\{۵\}$؛

$$۵-a=۰ \Rightarrow a=۵$$

$$c-a-b=۲۵-۵+۱۵=۳۵$$

(اللهدادی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ تساوی دو تابع)

۹- گزینه «۴» ـ وارون تابع $y=\frac{x+b}{۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۳y=x+b \Rightarrow x=۳y-b \Rightarrow y=۳x-b$$

$$۳x-b=ax+۵ \quad -b=۵ \Rightarrow b=-۵\ ,\ a=۳$$

$$a+b=-۵+۳=-۲$$

(اللهدادی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ وارون یک تابع خطی غیرثابت)

۱۰- گزینه «۱» ـ در مثلث TMR داریم:

$$MT^{۲}=RT^{۲}-RM^{۲} \Rightarrow MT^{۲}=\frac{۱}{۴}p^{۲}-q^{۲}$$

$$\Rightarrow MT=\sqrt{\frac{p^{۲}-۴q^{۲}}{۲}}$$

$$AT=AM+MT=\frac{p+\sqrt{p^{۲}-۴q^{۲}}}{۲}\ ,\ TB=MB-MT=\frac{p-\sqrt{p^{۲}-۴q^{۲}}}{۲}$$

مجموع این ریشه‌ها S، برابر P و حاصل‌ضرب آن‌ها P، برابر $q^{۲}$ خواهد بود، پس معادله مفروض برابر است با:

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-px+q^{۲}=۰$$

(اللهدادی) (پایه دهم ـ فصل چهارم ـ تشکیل معادله درجه دوم جدید، پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی و جبر)

۱۱- گزینه «۴» ـ دامنه توابع گویا باید مخالف صفر باشد، همچنین عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد، بنابراین:

$$ax^{۲}-ax+۵>۰ \Rightarrow \Delta<۰\ ,\ a>۰$$

$$\Delta=a^{۲}-۴\times۱\times۵a<۰ \Rightarrow a^{۲}-۲۰a<۰\ a(a-۲۰)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<a<۲۰$$

همچنین اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-۵}{\sqrt{۵}}$، بنابراین حدود a $[۰\ ,\ ۲۰)$ می‌باشد.

(پایه یازدهم ـ فصل اول ـ دامنه تابع گویا و توابع رادیکالی و رابطه ضرایب معادله درجه دو با تعداد ریشه‌ها، پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله‌ها و نامعادله‌ها)

۱۲- گزینه «۳» ـ برای حل معادله $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ از روش تغییر متغیر بهره می‌گیریم اگر به‌جای $\sqrt{x}$ ، t قرار دهیم:

$$(\sqrt{x})^۲-۲(\sqrt{x})+m-۱=۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲-۲t+m-۱=۰$$

برای اینکه معادله داده شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادله $t^۲-۲t+m-۱=۰$ یکی از حالات زیر اتفاق بیافتد:

۱) دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشه مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow ۴-۴(m-۱)>۰ \Rightarrow ۸-۴m>۰ \Rightarrow m<۲ \\ \dfrac{c}{a}>۰ \Rightarrow \dfrac{m-۱}{۱}>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱<m<۲ \\ \dfrac{-b}{a}>۰ \Rightarrow -\dfrac{-۲}{۱}>۰ \Rightarrow ۲>۰ \ \text{برقرار است} \end{cases}$$

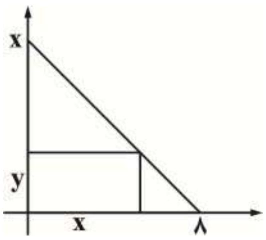
۲) دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. برای این منظور $c=۰\ ,\ \dfrac{-b}{a}>۰$ باشد، داریم:

$$m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

حال از اجتماع مقادیر ۲ و ۱، حدود m برابر است با: $۱\le m<۲$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۸۸) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ تغییر متغیر برای حل معادله درجه دوم و حل معادله درجه دوم و حاصل جمع و ضرب، پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله و نامعادله)

۱۳- گزینه «۱» ـ معادله وتر مثلث به‌صورت $y=\dfrac{-۳}{۴}x+۶$ است. اگر مطابق شکل طول و عرض مستطیل را $x\ ,\ y$ بنامیم، داریم:



$$S=xy=x(\frac{-۳}{۴}x+۶) \Rightarrow S=-\frac{۳}{۴}x^۲+۶x$$

$$\Rightarrow S_{max}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۳۶}{۴(\frac{-۳}{۴})}=۱۲$$

(آزاد ریاضی ـ ۹۱) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی و جبر ـ ماکزیمم و مینیمم سهمی، پایه دهم ـ فصل چهارم ـ معادله‌ها و نامعادله)

۱۴- گزینه «۴» ـ $fog(x)$ یعنی به‌جای x در تابع $f(x)$ تابع $g(x)$ را قرار دهیم، بنابراین داریم:

$$fog(x)=(g(x))^۲-۵g(x)+۹$$

$$fog(x)=x^۲+۳x+۵$$

از طرفی دیگر داریم:

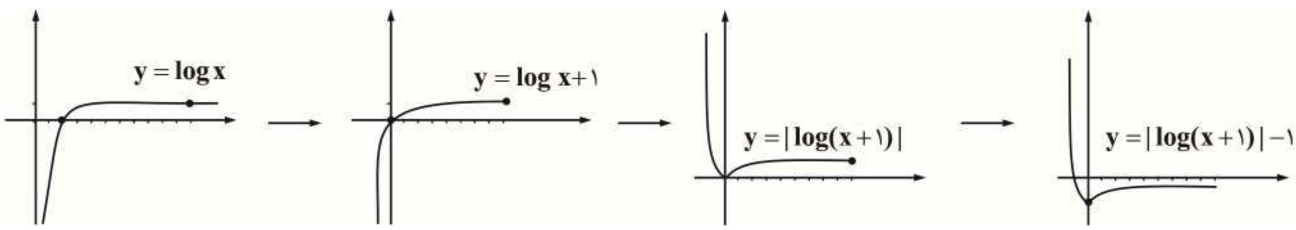
$$(g(x))^۲-۵g(x)+۹=x^۲+۳x+۵ \Rightarrow (g(x))^۲-۵g(x)-x^۲-۳x+۴=۰$$

معادله را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵+۴x^۲+۱۲x-۱۶}}{۲}=g(x)=\frac{۵\pm(۲x+۳)}{۲}=\begin{cases}-x+۱\\x+۴\end{cases}$$

(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ یافتن ضابطه تابع درونی تابع مرکب)

۱۵- گزینه «۱» ـ

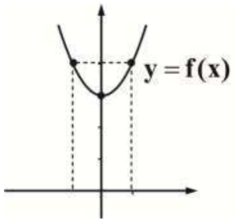


(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل نمودار توابع و رسم نمودار $|f(x)|$)

۱۶- گزینه «۱» ـ نمودارش را رسم می‌کنیم:

از نمودار تابع درمی‌یابیم در بازه $(-\infty\ ,\ ۰]$ نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}x\ge۰ & x^۳+۳\\x\le۰ & -x^۳+۳\end{cases}$$



(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ توابع نزولی و صعودی)

۱۷- گزینه «۳» ـ عبارت «الف»: در بازه $(0 , 1)$ نمودار x^2 بالای نمودار x^3 هست. بنابراین این گزینه نادرست است.
عبارت «ب»: این عبارت کاملاً صحیح است.
عبارت «ج»: اگر فرض کنیم $k = 1$، دامنه تابع $y = f(kx)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ یکسان است.
عبارت «د»: به‌ازای هر نوع تحدید دامنه که تابع درجه دو در آن بازه یک‌به‌یک باشد، می‌تواند تابع وارون متفاوت به‌دست آورد. (این عبارت نادرست است.) (اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تابع درجه ۳ ـ توابع نزولی و صعودی ـ انتقال توابع ـ تابع وارون و تحدید دامنه تابع)

۱۸- گزینه «۴» ـ زمانی‌که برای هر $x \in D_{fog(x)}$ داشته باشیم $fog(x) = x$، آن‌گاه f , g قرینه یکدیگرند.

$$y = x^2 + 6x + h \Rightarrow y - h = x^2 + 6x \Rightarrow y - h + 9 = x^2 + 6x + 9$$
$$y - h + 9 = (x+3)^2 \Rightarrow x + 3 = \sqrt{y - h + 9} \Rightarrow x = \sqrt{y - h + 9} - 3 \Rightarrow$$

چون $x \geq 3$ ، بنابراین در تابع وارون $y \geq 3$ است و ضابطه مطابق روبه‌رو است:
$$y = \sqrt{x - h + 9} - 3$$
$$\sqrt{x - h + 9} - 3 = \sqrt{x + 17} - k \Rightarrow k = 3 , 17 = 9 - h \Rightarrow h = -8$$
$$h + k = -8 + 3 = -5$$

(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تابع وارون)

۱۹- گزینه «۱» ـ عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد، بنابراین $\frac{f(x)}{g(x)} \frac{p(x)}{(x-3)} \geq 0$ چـون $f(x).g(x) < 0 , g(x) \neq 0$ بنـابراین $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ می‌باشد، پس باید داشته باشیـم $\frac{p(x)}{(x-3)} \leq 0$ بنـابراین دو حالـت وجـود دارد
$$\begin{cases} p(x) \geq 0 , (x-3) < 0 \\ \text{یا} \\ p(x) \leq 0 , (x-3) > 0 \end{cases}$$
چـون $p(x)$ اکیـداً صـعودی اسـت و $p(2) = 0$ بنابراین به‌ازای $x \geq 2$ داریم $p(x) \geq 0$ و به‌ازای $x \leq 2$ داریم $p(x) \leq 0$

$$\text{I)}\ p(x) \geq 0 , (x-3) < 0 \Rightarrow x \geq 2 \cap x < 3 \Rightarrow [2 , 3)$$
$$\text{II)}\ p(x) \leq 0 , (x-3) > 0 \Rightarrow x \leq 2 \cap x > 3 \Rightarrow \varnothing$$

از اجتماع II و I داریم: $D = [2 , 3)$ (اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ توابع صعودی و نزولی و دامنه توابع رادیکالی)

۲۰- گزینه «۲» ـ معادله کلی تابع درجه دوم به‌صورت $f(x) = A(x - \alpha)(x - \beta)$ است، بنابراین؛

$$f(x) = A(x-1)(x-5) \xrightarrow{f(0)=5} 5 = A \times 5 \Rightarrow A = 1$$
$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{+4} y + 4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow y + 4 = (x-3)^2 \xrightarrow{x>-3}$$
$$x - 3 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = \sqrt{y+4} + 3 \Rightarrow y = \sqrt{x+4} + 3$$

(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تابع وارون و محدود کردن دامنه تابع)

۲۱- گزینه «۲» ـ

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \Rightarrow D_f = R , g(x) = \sqrt{x - x^2} \Rightarrow D_g : x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

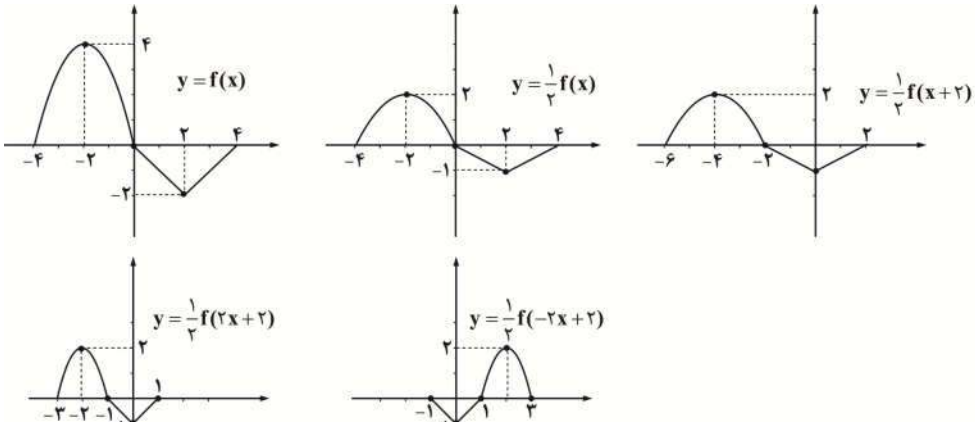
$$D_{gof} = \{x \in D_f , f(x) \in D_g\} = \{\underbrace{x \in R}_{I} , 0 \leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1\}$$

$$\frac{1 - x^2}{\underbrace{1 + x^2}_{+}} \geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 : \ \text{II}$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2 - 1 - x^2}{1 + x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-2x^2}^{\text{منفی یا صفر}}}{\underbrace{1 + x^2}_{+}} \leq 0 \ \ \text{III}$$

از اشتراک سه جواب به‌دست آمده به جواب $-1 \leq x \leq 1$ می‌رسیم. (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۶) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دامنه تابع مرکب)

۲۲- گزینه «۱» ـ



(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل نمودار توابع)

۲۳- گزینه «۳» ـ

گزینه «۱»: یک تابع صعودی است. نمودار نمایش دهنده یک تابه نمی‌باشد.

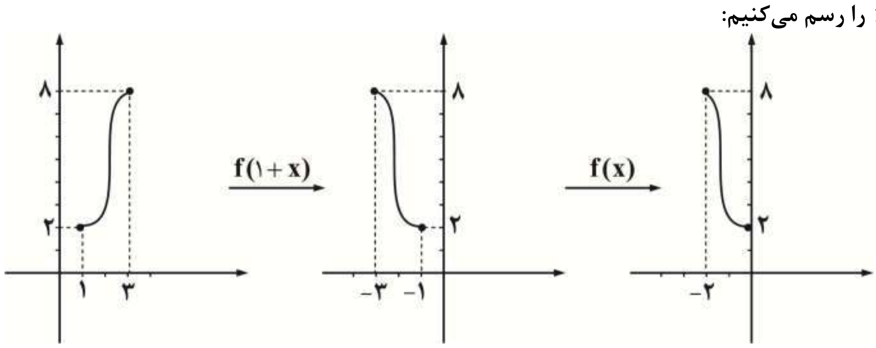
گزینه «۲»: یک تابع اکیداً نزولی است.

گزینه «۳»: یک تابع اکیداً صعودی است.

گزینه «۴»: یک تابع صعودی است.

(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ توابع صعودی و نزولی)

۲۴- گزینه «۳» ـ از روی تابع $f(۱-x)$، تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است.

(اللّه‌دادی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تبدیل نمودار توابع و تابع صعودی و نزولی)

۲۵- گزینه «۳» ـ

$$f^{-1}_{(x)} = \{(۱,۳),(۲,۴),(۶,۱),(۵,۲)\}$$

$$D_{(f^{-1}+g)_{(x)}} = \{x \mid x \in D_{f^{-1}}, D_g\} = \{۱,۲,۵\}$$

$$D_{((f^{-1}+g)og)} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_{(f^{-1}+g)}\} = \{۱,۵\}$$

$$(f^{-1}+g)_{(x)} = \{(۱,۴),(۲,۴),(۵,۴)\}, (f^{-1}+g)og = \{(۱,۴),(۵,۴)\}$$

(اللّه‌دادی) (پایه یازدهم و دوازدهم ـ فصل اول ـ ترکیب دو تابع و حاصل جمع دو تابع و تابع وارون)