حسابان

۱- گزینه «۳» ـ

$$۲x-۳=۷ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow f(۷)=۲۴$$
$$g(۷)=۳-\frac{f(۷)}{۲}=۳-\frac{۲۴}{۲}=۳-۱۲=-۹$$

چون $g(۷)=-۹$ است پس نقطه $(۷\,,-۹)$ روی تابع $g(x)$ قرار دارد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع)

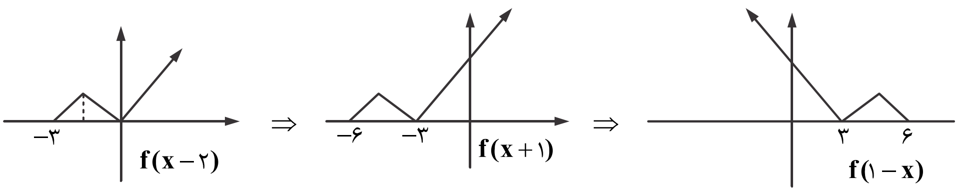
۲- گزینه «۲» ـ دامنه تابع $f(x)$ برابر $(-\infty\,,۴]$ است، پس دامنه تابع $f(x+۱)$ برابر $(-\infty\,,۳]$ خواهد بود. دامنه $g(x)$ و $۲g(x)$ برابر $(-\infty\,,۳]$ است.

$$D_{\frac{f(x+۱)}{۲g(x)}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=(-\infty\,,۳)$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع)

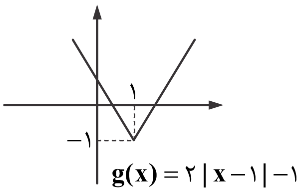
۳- گزینه «۱» ـ مسیر رسم شکل به صورت زیر است:

$$f(x-۲)\xrightarrow{\text{سه واحد به چپ}}f(x+۱)\xrightarrow{\text{x ها قرینه}}f(۱-x)$$



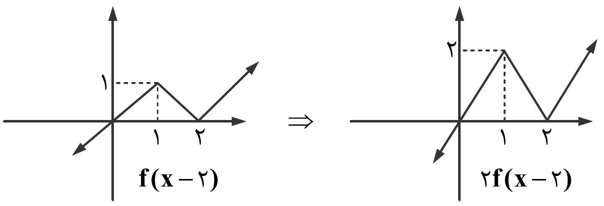
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع)

۴- گزینه «۳» ـ نمودار $f(x)$ و $h(x)$ درست رسم شده است. اما نمودار درست $g(x)$ به صورت زیر است.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع)

۵- گزینه «۴» ـ برای رسم تابع $۲f(x-۲)$ مراحل زیر را پی می‌گیریم.



واضح است که خط $y=\frac{۳}{۲}$ نمودار تابع $۲f(x-۲)$ را در سه نقطه قطع می‌کند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع)

۶- گزینه «۴» ـ

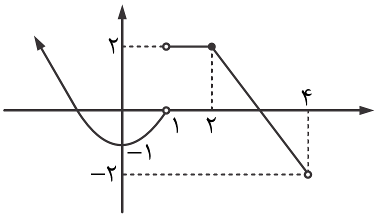
$$f(x)=x^۲+۲x \Rightarrow f(x-۲)=(x-۲)^۲+۲(x-۲)=x^۲-۲x$$
$$f(x-۲)-۲=x^۲-۲x-۲$$

حال تابع به‌دست آمده را با تابع اصلی قطع می‌دهیم.

$$x^۲+۲x=x^۲-۲x-۲ \Rightarrow ۴x=-۲ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

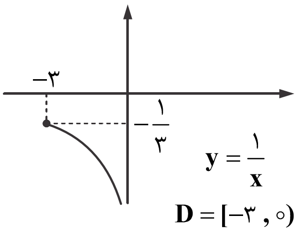
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تبدیل تابع)

۷- گزینه «۲» ـ نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنید که برد تابع $(-۲\,,+\infty)$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ برد)

۸- گزینه «۲» ـ نمودار تابع اصلی به‌صورت زیر است.



$$y=\frac{۱}{x}$$
$$D=[-۳\,,\,۰)$$

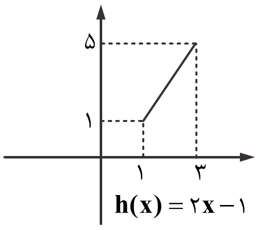
اگر $f:A\to B$ تعریف شود آن گاه باید برد تابع زیرمجموعه B باشد. پس B باید وسیع‌تر از برد بوده و آن را پوشش دهد. چون $(-\infty\,,\,-\frac{۱}{۳}]\subset(-\infty\,,\,۰)$ است پس جواب گزینه «۲» خواهد بود. سایر گزینه‌ها چنین شرایطی ندارند. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ هم‌دامنه و برد)

۹- گزینه «۳» ـ چون تابع g ثابت و $g(۴)=۲$ است پس $g(x)=۲$ است. f تابع خطی گذرا از مبدأ مختصات است پس $f(x)=ax$ خواهد بود.

$$\frac{f(۲)+g(۳)}{۲f(۳)+g(۱)}=۴\ \Rightarrow\ \frac{۲a+۲}{۶a+۲}=۴\ \Rightarrow\ ۲a+۲=۲۴a+۸\ \Rightarrow\ ۲۲a=-۶\ \Rightarrow\ a=-\frac{۳}{۱۱}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ تابع خطی و ثابت)

۱۰- گزینه «۱» ـ چون دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابرند، پس $f(x)-g(x)=۰$ است. $h(x)=(f-g)(x)+۲x-۱=f(x)-g(x)+۲x-۱=۲x-۱$
پس $h(x)$ تابع خطی $۲x-۱$ با دامنه $[۱\,,\,۳]$ است.



$$h(x)=۲x-۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تساوی دو تابع)

۱۱- گزینه «۱» ـ چون $f(x)$ تابعی گویاست، پس:

$$\begin{cases}m-۱=۰\ \Rightarrow\ m=۱\\ n+۱=۰\ \Rightarrow\ n=-۱\end{cases}\Rightarrow\ g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-x-۲}$$
$$x^{۲}-x-۲=۰\ \Rightarrow\ x=-۱,۲\ \Rightarrow\ D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ انواع و دامنه تابع)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$x-۴\geq ۰\ \Rightarrow\ x\geq ۴$$
$$\sqrt{x-۴}-۱=۰\ \Rightarrow\ \sqrt{x-۴}=۱\ \Rightarrow\ x-۴=۱\ \Rightarrow\ x=۵$$
$$D_f=[۴\,,+\infty)-\{۵\}$$

دامنه تابع $f(x)$ شامل اعداد طبیعی $\{۱\,,۲\,,۳\,,۵\}$ نمی‌باشد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ دامنه)

۱۳- گزینه «۲» ـ می‌دانیم که در توابع برای هر ورودی از دامنه فقط یک خروجی از برد خواهیم داشت. برای رد گزینه‌ها (تابع نبودن) می‌توانیم عددگذاری کنیم:

گزینه «۱»: $x=-۱\ \Rightarrow\ y^{۲}=۱-۱+۴=۴\ \Rightarrow\ y=\pm۲\ \Rightarrow$ تابع نیست

گزینه «۳»: $x=۰\ \Rightarrow\ ۰=۰\times y\ \Rightarrow\ y\in\mathbb{R}\ \Rightarrow$ تابع نیست

گزینه «۴»: $x=۱\ \Rightarrow\ y^{۲}=۲\ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow$ تابع نیست

اما اثبات تابع بودن گزینه دوم:

$$y^{۲}+(x+۳)^{۲}=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}y^{۲}=۰\\ (x+۳)^{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}y=۰\\ x=-۳\end{cases}$$

این رابطه نمایش یک نقطه به مختصات $(-۳\,,\,۰)$ را می‌دهد. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تشخیص تابع)

۱۴- گزینه «۱» ـ

$$y=x-\frac{۳}{x}\ \Rightarrow\ xy=x^{۲}-۳\ \Rightarrow\ x^{۲}-xy-۳=۰$$
$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^{۲}+۱۲}}{۲}\ \xrightarrow{x>۰}\ x=\frac{y+\sqrt{y^{۲}+۱۲}}{۲}\ \Rightarrow\ f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^{۲}+۱۲}}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ وارون)

۱۵- گزینه «۳» ـ ابتدا دامنه دو تابع f و g را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x} : x \geq \circ \\ \sqrt{۴-x} : x \leq ۴\end{array}\right\} \Rightarrow D_f = D_g = [\circ , ۴]$$

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{۴-x})(\sqrt{x} - \sqrt{۴-x}) \Rightarrow h(x) = x - (۴-x) = ۲x - ۴$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ اعمال دو تابع)

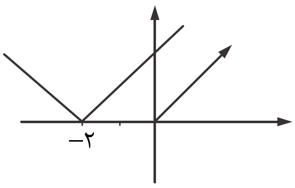
۱۶- گزینه «۳» ـ

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + ۴x + ۴) = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۴} = \sqrt{(x+۲)^۲} = |x+۲| \ \text{،}\ D_{gof} = \mathbb{R}$$

$$(fo(g-۲))(x) = f(\sqrt{x} - ۲) = (\sqrt{x} - ۲)^۲ + ۴(\sqrt{x} - ۲) + ۴ = x$$

$$D_{fo(g-۲)} = \{x \geq \circ \mid (\sqrt{x} - ۲) \in \mathbb{R}\} = [\circ , +\infty)$$

نمودار دو تابع به دست آمده به صورت زیر است.



دو تابع همدیگر را قطع نمی‌کنند. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ ترکیب)