حسابان

۱- گزینه «۱» ـ برای برابری دو تابع، ابتدا دامنه آن‌ها را برابر می‌کنیم و سپس خروجی‌های یکسان دریافت می‌کنیم.

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \\ x^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x = 1, -1$$

$$D_f = D_g = \{1, -1\}$$

$$\begin{cases} f(1) = g(1) = 0 \\ f(-1) = g(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{1}{2} + a\right| + \left(\frac{1}{3} - b\right)^{10} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} - b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow ab = -\frac{1}{6}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تساوی دو تابع) (متوسط)

۲- گزینه «۱» ـ چون تابع f تابعی گویاست پس:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{kx^2 - 3x - 1}$$

دامنه f به‌صورت $\mathbb{R} - \{P\}$ است پس مخرج کسر ریشه مضاعف دارد.

$$kx^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 4k = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{4}$$

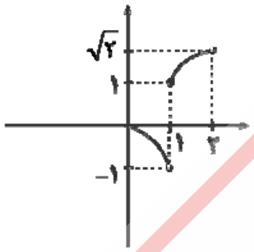
$$x = \frac{3}{2k} = \frac{3}{2 \times \frac{-9}{4}} = -\frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ دامنه تابع گویا) (آسان)

۳- گزینه «۴» ـ

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -x^2$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x}$$



برد تابع $(-1, 0] \cup [1, \sqrt{2})$ خواهد بود. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ جزءصحیح) (آسان)

۴- گزینه «۱» ـ برای nهای فرد داریم:

$$t_n = (1 - (-1))\left[-\frac{1}{n}\right] = 2\left[\frac{-1}{n}\right]$$

$$t_1 = t_3 = t_5 = t_7 = t_9 = -2$$

برای nهای زوج داریم:

$$t_2 = -2 + a \quad , \quad t_4 = t_6 = t_8 = t_{10} = -1 + a$$

حال مجموع ده جمله را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$-2 + a + 4(-1 + a) + 5(-2) = 2 \Rightarrow -16 + 5a = 2 \Rightarrow 18 = 5a \Rightarrow a = 3/6$$

(نصیری) (پایه دهم ـ دنباله) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ـ تابع $|x| - 2x - 1$ یک‌به‌یک است زیرا:

$$|x| - 2x - 1 = \begin{cases} -3x - 1 & x \le 0 \\ -x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

هر دو ضابطه با شیب منفی است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تابع یک‌به‌یک) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ برای $x \ge 0$ داریم:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}, x \ge 1$$

برای $x < 0$ داریم:

$$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1, x < 1$$

$$f^{-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & x \ge 1 \\ x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ تابع وارون) (متوسط)

۷- گزینه «۴» ـ اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g برابر {۲ , ۳} است.

$$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=-1+7=6$$

$$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=2+\frac{11}{2}=7/5$$

مجموع مقادیر برد برابر ۱۳/۵ است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ اعمال توابع) (آسان)

۸- گزینه «۴» ـ

$$2a+1=f(1-a-1)-1 \Rightarrow f(-a)=2(a+1)$$

$$\frac{x}{2}=-a \Rightarrow x=-2a \xrightarrow{g} g(-2a)=1-f(-a) \Rightarrow g(-2a)=1-2(a+1)=-1-2a \Rightarrow (-2a\,,-1-2a)\in g$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ مراحل زیر را برای تبدیل تابع ببینید:

$$f(x-1) \xrightarrow{(1)} f(x) \xrightarrow{(2)} f(\frac{x}{3})$$

در مرحله اول، به طول نقاط یک واحد اضافه شده است. پس دامنه $f(x)$ برابر $[-2\,,\frac{1}{2}]$ است. در مرحله دوم طول نقاط سه برابر شده است. پس دامنه $[-6\,,\frac{3}{2}]$ خواهد بود.

$$D_g=D_{f(\frac{x}{3})}=[-6\,,\frac{3}{2}]$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$|x^2-1| \xrightarrow{(1)} |(x-1)^2-1| \xrightarrow{(2)} |(2x-1)^2-1|=|4x^2-4x|$$

$$|4x^2-4x|=|x^2-1| \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-4x=x^2-1 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{1}{3} \end{cases} \\ 4x^2-4x=1-x^2 \Rightarrow 5x^2-4x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_3=1 \\ x_4=\frac{-1}{5} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع طول‌های نقاط برخورد:

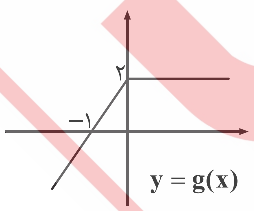
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{17}{15}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تبدیل توابع) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$g(x)=f(x+2)=x+2-|x|$$

x	-1	0	1
g(x)	0	2	2



تابع g از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند. (نصیری) (پایه یازدهم ـ انتقال و قدرمطلق) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{31}{8} \Rightarrow \frac{-(1-16m)}{-4m}=\frac{-31}{8} \Rightarrow \frac{1-16m}{4m}=\frac{-31}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1-16m}{m}=\frac{-31}{2} \Rightarrow 2-32m=-31m \Rightarrow m=2 \Rightarrow y=x^2+4x-2 \Rightarrow \frac{-b}{2a}=-2$$

پس خط تقارن $x=-2$ است. (نصیری) (پایه دهم ـ سهمی) (آسان)

۱۳- گزینه «۲» ـ در تابع f ضریب $x^{۲}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$۲a+۱+۱=۰ \Rightarrow ۲a+۲=۰ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow f(x)=-x-۱ \Rightarrow f(x)+x=-x-۱+x=-۱$$

پس تابع $f(x)+x$ یک تابع ثابت است. (نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ تابع ثابت و خطی) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases} x+\sqrt{y-۳}=۲ \\ \sqrt{y-۳}=x^{۲} \end{cases} \xrightarrow{-} x^{۲}+x=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$$x=۱ \Rightarrow \sqrt{y-۳}=۱ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow xy=۴$$

$$x=-۲ \Rightarrow \sqrt{y-۳}=۴ \Rightarrow y=۱۹ \Rightarrow xy=-۳۸$$

(نصیری) (پایه دهم ـ تابع ـ برابری زوج مرتب) (دشوار)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$-\sqrt{x-۲}+۳=۲x-۱ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=۴-۲x \Rightarrow x-۲=۱۶-۱۶x+۴x^{۲}$$

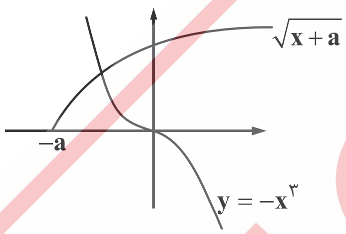
$$\Rightarrow ۴x^{۲}-۱۷x+۱۸=۰ \Rightarrow (۴x-۹)(x-۲)=۰ \begin{cases} x=۲ & \text{قابل قبول} \\ x=\frac{۹}{۴} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

طول نقطه برخورد $x=۲$ است.

$$x=۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow A(۲,۳) \Rightarrow |OA|=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ تابع ـ تبدیل توابع) (آسان)

۱۶- گزینه «۱» ـ اگر دو تابع را رسم کنیم خواهیم دید که برای $a>۰$ دو تابع در یک نقطه با طول منفی متقاطع‌اند.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ چندجمله‌ای) (آسان)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$fog(x)>۰ \Rightarrow f(g(x))>۰ \Rightarrow \frac{۱-g(x)}{۱+g(x)}>۰ \Rightarrow -۱<g(x)<۱$$

$$\Rightarrow -۱<۲x-۱<۱ \Rightarrow ۰<x<۱$$

بخشی از جواب در گزینه (۱) آمده است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع ـ متوسط)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$x=۰ \Rightarrow f^{۲}(۰)f(g(۰))=۱ \Rightarrow f^{۲}(۰)f(۱)=۱ \Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{f^{۲}(۰)}$$

$$x=۱ \Rightarrow f^{۲}(۱)f(g(۱))=۲ \Rightarrow f^{۲}(۱)f(۰)=۲$$

$$(\frac{۱}{f^{۲}(۰)})^{۲}f(۰)=۲ \Rightarrow \frac{۱}{f^{۳}(۰)}=۲ \Rightarrow f(۰)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (دشوار)

۱۹- گزینه «۳» ـ

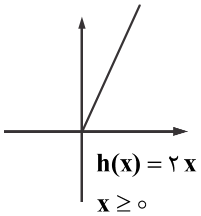
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq ۰ \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [۰ , +\infty)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ \geq ۰\} = \mathbb{R}$$

اشتراک دامنه‌های به دست آمده $[۰ , +\infty)$ است.

$$h(x) = (fog)(x) + (gof)(x) = f(\sqrt{x}) + g(x^۲) = x + |x|$$

چون دامنه تابع h برابر $[۰ , +\infty)$است پس $h(x) = ۲x$ خواهد بود.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» ـ مفهوم این سوال این است که ریشه‌های معادله $(gof)(x) = (fog)(x)$ را حساب کنیم.

$$(fog)(x) = (gof)(x) \Rightarrow ۲(x^۲ + x) - ۱ = (۲x - ۱)^۲ + ۲x - ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۱ = ۴x^۲ - ۴x + ۱ + ۲x - ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۲}}{۲}$$

بزرگ‌ترین جواب بدست آمده $\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ تابع ـ ترکیب دو تابع) (آسان)