

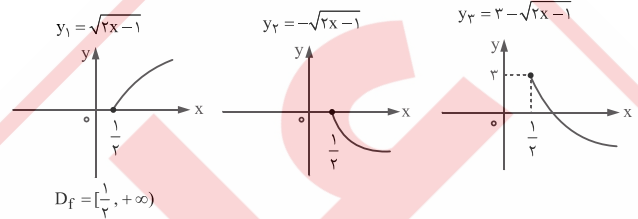
## حسابان

۱- گزینه «۱» - تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  در دامنه خود با شرط  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  به یک تابع ثابت یعنی نموداری با خط افقی موازی محور طول‌ها تبدیل می‌گردد و در تابع فوق داریم:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3x+1}{6x+2} = \frac{3x+1}{2(3x+1)} \xrightarrow{x \neq -\frac{1}{3}} f(x) = \frac{1}{2}$$

و  $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$  خواهد بود. (حتمی) (پایه دهم - تابع - تابع ثابت) (متوسط)

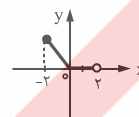
۲- گزینه «۳» - با توجه به همواره مثبت بودن عبارت رادیکال یعنی  $\sqrt{2x-1} \geq 0$  بیش‌ترین مقدار تابع  $f(x)$  برابر عدد ۳ بوده و برد آن  $y \leq 3$  یا  $R_f = (-\infty, 3]$  خواهد بود. بنابراین شامل چهار عدد صحیح نامنفی  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  می‌باشد. از طرفی به کمک انتقال نمودارها داریم:



و مطابق نمودار نهایی برد تابع بازه  $R_f = (-\infty, 3]$  خواهد بود.

(حتمی) (پایه دهم - تابع - برد تابع و انتقال افقی و عمودی) (متوسط)

۳- گزینه «۳» - ابتدا براساس عبارت داخل براکت تفکیک ۲ واحدی بازه داده شده را انجام می‌دهیم (می‌توانیم بازه داخل براکت را به‌دست آوریم یا اینکه برای هر  $[mx]$  تفکیک  $\frac{1}{m}$  واحدی منظور شود).



$$1) x \in [-2, 0) \xrightarrow{x=-2} y = x \left[ \frac{x}{2} \right] = -x$$

$$2) x \in [0, 2) \xrightarrow{x=0} y = 0$$

(حتمی) (پایه یازدهم - تابع - تابع جزء صحیح) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - در تعیین ضابطه وارون‌پذیری سه گام اصلی عبارتند از: بررسی شرط وارون‌پذیری که همان یک به یک بودن آن است؛ تعیین ضابطه  $f^{-1}(x)$  و یافتن دامنه تابع وارون یا برد تابع. هر یک از ضابطه‌های داده شده در بازه خود یک به یک بوده و برد آن‌ها نیز اشتراک ندارند و به راحتی با رسم آن به وارون‌پذیری تابع می‌رسیم. برای  $f^{-1}(x)$  خواهیم داشت:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \xrightarrow{x \geq 1} x = \sqrt{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \sqrt{x-1}$$

جزر مثبت

$$y = 2x - 3 \Rightarrow 2x = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x+3}{2}$$

در مرحله نهایی محاسبه دامنه توابع وارون یا برد آن‌ها می‌باشد که داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , x \geq 2 \\ \frac{x+3}{2} & , x < -1 \end{cases}$$

(حتمی) (پایه یازدهم - تابع - تعیین ضابطه تابع وارون) (دشوار)

۵- گزینه «۴» - از مجهول مسئله شروع می‌کنیم که مطابق گزینه‌ها حاصل آن برابر یک عدد مانند  $k$  می‌باشد.

$$g^{-1}(4) = k \Rightarrow g(k) = 4 \Rightarrow f(\delta k - 4) = 4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4) = \delta k - 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = x + \sqrt{x} = 6$$

$$\Rightarrow \delta k - 4 = 6 \Rightarrow \delta k = 10 \Rightarrow k = 2$$

(حتمی) (پایه یازدهم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۶- گزینه «۲» - ابتدا برای  $f(\sqrt{3})$  داریم:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}x}{6-3x} = \frac{3}{6-3\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

و برای تعیین  $g(2+\sqrt{3})$  بهتر است ابتدا عبارت  $g(x)$  را به شکل مربع کامل بنویسیم:

$$g(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow g(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3}-2)^2 + 1 = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$$

(حتمی) (پایه یازدهم - تابع - ترکیب توابع) (متوسط)

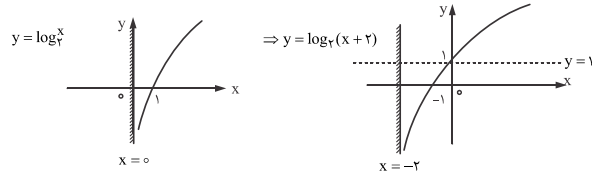
۷- گزینه «۱» - براساس مطالب انتقال افقی کتاب درسی دوازدهم در فصل اول و رسم مثال‌های  $y = \sin x$  و  $y = \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  در می‌یابیم که نمودار تابع  $y = \sin kx$  در  $(2k+1)\pi$  نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند.

$$2k+1 = 7 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - انتقال تابع - انتقال افقی در توابع مثلثاتی) (متوسط)

۸- گزینه «۲» - می‌بایستی  $1 - \log_2(x+2) \geq 0$  بوده یعنی  $\log_2(x+2) \leq 1$  باشد. در کتاب

درسی دوازدهم نمودار تابع لگاریتمی فوق براساس انتقال نمودار  $\log_2^x$  آمده است که داریم:



نمودار تابع لگاریتمی در بازه  $(-2, 0]$  کوچک‌تر یا مساوی خط افقی  $y=1$  بوده و این بازه شامل دو عدد صحیح  $\{-1, 0\}$  خواهد بود.

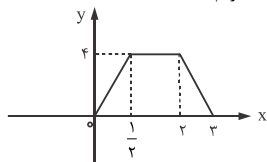
(حتمی) (پایه دوازدهم - انتقال تابع - انتقال افقی تابع لگاریتمی) (متوسط)

۹- گزینه «۲» - می‌بایستی  $a = 1$  باشد که  $a = m^2 - 7m + 3 = 1$  بوده و به معادله درجه

$$\text{دوم } m^2 - 7m + 2 = 0 \text{ می‌رسیم که با توجه به } \Delta > 0, \text{ مجموع ریشه‌ها } \frac{-b}{a} = 7$$

خواهد بود. (سراسری ۱۴۰۳ با تغییر) (پایه دوازدهم - انتقال توابع - انتقال افقی) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» - با رسم انتقال یافته به شکل  $2f(2x-1)$  داریم:



و مساحت ذوزنقه حاصل برابر است با:

$$S = \frac{(2 + \frac{3}{2}) \times 4}{2} = 2(2 + \frac{3}{2}) = 6 + 3 = 9$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - انتقال تابع - انتقال افقی و عمودی) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» - ابتدا در انتقال افقی داریم:

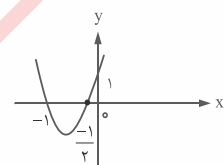
$$y = 2(x-1)^2 + (x-1)$$

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) + x - 1 = 2x^2 - 4x + 2 + x - 1 = x^2 - 3x + 1$$

سپس برای تقارن نسبت به محور عرض‌ها خواهیم داشت:

$$g(x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1$$

و با رسم سهمی  $g(x)$  و یافتن ریشه‌های ۱- یا  $\frac{-1}{2}$  داریم:



که از ناحیه چهارم مختصات نمی‌گذرد.

(حتمی) (پایه دوازدهم - انتقال توابع - انتقال افقی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» - ابتدا مختصات نقطه  $(1, 2)$  را بر روی نمودار تابع  $y = 3 - f(1+2x)$  قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow 2 = 3 - f(3) \Rightarrow f(3) = 1 \Rightarrow (3, 1) \in f$$

و سپس داریم:

$$y = 3f(\frac{x}{2}) - 1$$

$$\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 3f(\frac{6}{2}) - 1 = 3f(3) - 1, f(3) = 1$$

$$\Rightarrow y = 3 - 1 = 2 \Rightarrow (6, 2)$$

(حتمی) (پایه دوازدهم - انتقال توابع - انتقال افقی و عمودی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» - در برد تابع فقط ضرب عددی  $\sqrt{2}$  و افزایش تابع به اندازه یک واحد تأثیر داشته و داریم:

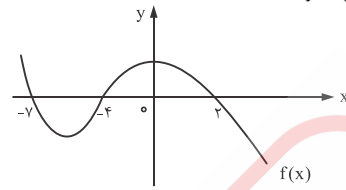
$$-\sqrt{3} \leq y \leq 2 \xrightarrow{\times \sqrt{2}} -\sqrt{6} \leq \sqrt{2}y \leq 2\sqrt{2} \xrightarrow{+1} -\sqrt{6} + 1 \leq F(x) \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$F(x)$  را تابع حاصل در نظر گرفته‌ایم و ۵ عضو صحیح  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  در این بازه برد خواهیم داشت. که سه عضو آن در مجموعه اعداد طبیعی است.

(آزاد ۸۹ با تغییر) (پایه دوازدهم - انتقال توابع - انتقال عمودی) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - فقط به خاطر ۲ برابر شدن تابع حاصل، عرض رسم سهمی دو برابر خواهد شد و به  $۶ = ۲ \times ۳$  می رسمیم. (حاتمی) (پایه دوازدهم - انتقال تابع - انتقال عمودی) (آسان)

۱۵- گزینه «۱» - با استفاده از نمودار  $y = f(x-3)$  و عمل انتقال افقی ابتدا به نمودار تابع  $f(x)$  می رسمیم که به شکل زیر خواهد بود.



حال باید  $xf(x) \geq 0$  بوده یعنی  $x$  و  $f(x)$  با یکدیگر هم علامت باشند. که شامل بازه‌های  $[-7, -4] \cup [0, 2]$  می باشد.

(حاتمی) (پایه دوازدهم - انتقال توابع - انتقال افقی و دامنه آن) (متوسط)