

حسابان

۱- گزینه «۱» -

$$f(x) = x^2 - x - 3 \Rightarrow \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x+2}{y-9}$$

$$(x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

طول پاره خط خواسته شده، همان اختلاف بین ریشه‌ها می‌باشد که مقدار آن برابر با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 7 \Rightarrow \text{است یعنی:}$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (آسان)
۲- گزینه «۲» -

$$f(x) = 3^x + |x| \Rightarrow \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x+2}{y-3} \Rightarrow g(x) = 3^{x+2} + |x+2| - 3$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3^{x+2} + |x+2| = 3 \Rightarrow \text{ریشه تابع } g$$

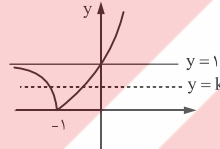
$$\Rightarrow x+2+|x+2|=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2=-x-1 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \\ x+2=x+1 \Rightarrow \text{فاقد ریشه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 3^{-\frac{3}{2}+2} + \left|-\frac{3}{2}+2\right| = 1$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (متوسط)
۳- گزینه «۳» -

$$\sqrt{2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1} = \sqrt{2^{2(x+1)} - 2^{x+1} + 1} = \sqrt{(2^{x+1} - 1)^2} = |2^{x+1} - 1|$$

که نمودار آن به صورت زیر است.



که با توجه به نمودار مشخص است برای آنکه معادله $\sqrt{2^{2x+2} - 2^{x+2} + 1} = k$ دو ریشه داشته باشد باید $k \in (0, 1)$ پس $b-a=1$
(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (متوسط)
۴- گزینه «۴» -

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - y \Rightarrow y+k \Rightarrow \sqrt{\sqrt{x} + 3} - f(1) = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1 \xrightarrow{x \Rightarrow x-2} g(3) = 1$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (دشوار)
۵- گزینه «۱» -

$$f(u) = 0 \Rightarrow u = -3, u = 2, u = 5$$

$$\begin{cases} u = 3x \Rightarrow 3x = -3, 3x = 2, 3x = 5 \Rightarrow x = -1, x = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{3} \\ u = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} = -3, \frac{x}{3} = 2, \frac{x}{3} = 5 \Rightarrow x = -9, x = 6, x = 15 \end{cases}$$

$|10 - (-6)| = 16 \Rightarrow$ کوچکترین ریشه $= -6$ ، بزرگترین ریشه $= 15$
(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انبساط و انقباض و محاسبه ریشه توابع) (متوسط)
۶- گزینه «۳» - ابتدا رأس $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x) = a(x-2)(x-4), A(0, 8)$$

$$8 = a(-2)(-4) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8$$

که رأس آن $(3, -1)$ است. برای آنکه رأس تابع $g(x) = \frac{1}{4}f(1-x) - 2$ را بیابیم

به صورت زیر عمل می‌کنیم:

برای محاسبه طول رأس سهمی $g(x)$ ، طول رأس سهمی f را یک واحد کم می‌کنیم و حاصل را قرینه می‌کنیم

$$x_s \Rightarrow 3-1=2$$

برای محاسبه عرض رأس سهمی $g(x)$ ، عرض رأس سهمی f را بر ۴ تقسیم کرده و ۲ واحد از آن کم می‌کنیم

$$y_s \Rightarrow \frac{1}{4}(-1) - 2 = -\frac{9}{4}$$

یعنی رأس آن $(2, -\frac{9}{4})$ است پس:

$$-2 + \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{17}{4}$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (دشوار)

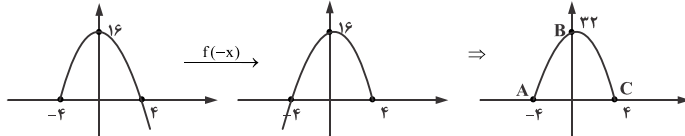
۷- گزینه «۲» - برای آنکه دامنه توابع $f(x), f(kx)$ یکسان باشد باید $k=1$ باشد پس

$$k = 3a^2 - 5a + 3$$

$$3a^2 - 5a + 3 = 1 \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{مقدار حداقل}$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - انبساط و انقباض تابع) (متوسط)

$$f(x) + f(-x) \leq \text{رئوس برخورد محور مختصات}$$



$$D_f = [-4, +\infty)$$

$$D_{f(-x)} = (-\infty, 4]$$

$$D = [-4, 4]$$

ناحیه مورد نظر یک مثلث با قاعده $AC=8$ و ارتفاع $BO=4$ است که:

$$S = \frac{AC \times BO}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$$

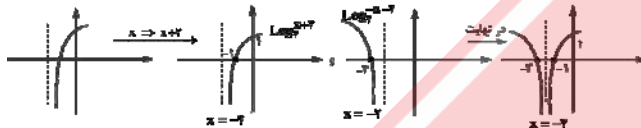
$$16 = \sqrt{2}A \Rightarrow A = 4\sqrt{2}$$

(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تابع - تبدیل نمودار توابع - قرینه تابع) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$f(x) = \frac{1}{x} \log \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \log \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \times 2 \log \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x+2}{\sqrt{x}} & x > -2 \\ \log_2 \frac{x+2}{\sqrt{x}} & x < -2 \end{cases} \quad \text{که به تابع زیر تبدیل می‌شود:}$$



(زنگنه) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - تابع - تبدیل نمودار توابع - انتقال طولی و عرضی) (دشوار)

۱۰- گزینه «۱» -

$$f \xrightarrow{\text{تابع همانی}} f(x) = (m-2)x^2 + (3-n)x \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x$$

$$g \xrightarrow{\text{تابع ثابت}} g(x) = (2k-2)x + 2n \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = 4$$

$$f(2-k) + m g(n) = f\left(2-\frac{3}{2}\right) + 2g(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 8 = 10$$

(زنگنه) (پایه دهم - فصل پنجم - درس دوم - تابع - تابع همانی و تابع ثابت) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» - می‌دانیم که:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\log(\sqrt{3}) = f(g(\sqrt{3}))$$

$$g(\sqrt{3}) = f([x - f^2(x)]) \xrightarrow{x=\sqrt{3}} f(\sqrt{3}) = -1, f([\sqrt{3} - f^2(\sqrt{3})])$$

$$f([\sqrt{3} - 1]) = 0$$

(زنگنه) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - تابع - تابع جزء صحیح - ترکیب توابع) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» - برای سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a < 0, b < 0, c < 0$ بنابراین

$$\alpha = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} = -1 - 1 = -2, \beta = \frac{|a|}{a} + \frac{c}{|c|} = -1 - 1 = -2$$

پس تابع $g(x) = \alpha x + \beta$ به گونه‌ای است که شیب منفی و عرض از مبدا منفی دارد که شبیه گزینه «۴» است.

(زنگنه) (پایه دهم - فصل پنجم - درس دوم و سوم - تابع - تابع درجه دوم - تابع خطی) (متوسط)

۱۳- گزینه «۲» -

$$[x+2]^2 - [x-1]^2 = 16$$

$$([x+2] - [x-1])([x+2] + [x-1]) = 16$$

$$([x] + 2 - [x] + 1)([x] + 2 + [x] - 1) = 16$$

$$(4)(2[x] + 1) = 16$$

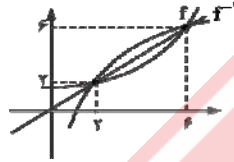
$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow \beta - \alpha = 1$$

(زنگنه) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس دوم - تابع - معادلات شامل براکت) (دشوار)

۱۴- گزینه «۴» - شرط دامنه تابع $\sqrt{f^{-1}(x)-x}$ عبارت است از:

$$f^{-1}(x)-x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq x$$

چون نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم متقارن هستند، پس نمودار f^{-1} به صورت زیر است که در بازه $[۲, ۶]$ شرط $f^{-1}(x) \geq x$ تامین شده است. (چون نمودار f^{-1} از نمودار x بالاتر است) و این بازه شامل پنج عدد صحیح است.



(زنگنه) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم - تابع - تابع وارون) (متوسط)

۱۵- گزینه «۳» - در توابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) اگر $a+d=0$ وارون تابع بر خودش

منطبق است و بی شمار نقطه تقاطع دارد که این شرط فقط برای گزینه «۳» برقرار است.

(زنگنه) (پایه یازدهم - فصل دوم - درس سوم - تابع - تابع وارون) (متوسط)