حسابان

۱- گزینه «۱» ـ طبق تعریف تابع به‌صورت زوج مرتب می‌توان فهمید اگر دو زوج مرتب وجود داشته باشند که مؤلفه اول آن‌ها یکسان است، باید مؤلفه دوم نیز یکسان باشد در نتیجه:

$$(2, 3a) = (2, a^2+2) \Rightarrow a^2+2=3a \Rightarrow a^2-3a+2=0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a-1)=0 \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

دقت کنید که اگر $a=2$ آن‌گاه زوج مرتب سوم یعنی $(1, a)$ برابر با $(1, 2)$ می‌شود که به‌دلیل وجود زوج مرتب $(6, 2)$ در تابع، غیرقابل قبول است. پس $a=1$ تنها جواب قابل قبول بوده و گزینه «۱» صحیح است. (فخیمی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ مفهوم تابع)

۲- گزینه «۲» ـ کافیست نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند را پیدا کنیم:

$$(x+2)(x^3-3x^2+2x)(2^x+5)=0 \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-2)(x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} \\ 2^x+5=0 \Rightarrow 2^x=-5 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه $x=\{-2, 0, 1, 2\}$ نقاط غ ق ق هستند یعنی گزینه «۲» صحیح است.

نکته: دقت کنید که عامل $x+2$ در صورت هم وجود داشت امّا نمی‌توانیم این عامل را از صورت و مخرج ساده کنیم.

(فخیمی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ دامنه تابع)

۳- گزینه «۲» ـ زمانی‌که دامنه $f(x)$ برابر با $[0, 5)$ است یعنی هیچ مقداری خارج از این بازه نمی‌تواند ورودی تابع باشد. در نتیجه باید $0 \le \frac{3x}{2} < 5$ باشد یا به عبارتی $0 \le x < \frac{10}{3}$. (فخیمی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ دامنه تابع)

۴- گزینه «۱» ـ طبق تعریف تابع باید به‌ازای یک x خاص، تنها یک y داشته باشیم. گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» را به‌این‌صورت رد می‌کنیم: اگر قرار دهیم $x=0$:

گزینه «۲» : $x=0 \Rightarrow y-[y]=0 \Rightarrow y=[y] \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases}$ بیش از یک y پیدا کردیم:

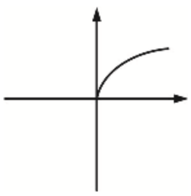
گزینه «۳» : $x=0 \Rightarrow y^3-y=0 \Rightarrow y(y+1)(y-1)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ y=-1 \end{cases}$ بیش از یک y پیدا کردیم:

گزینه «۴»: $x=0 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow y(y+1)=0 \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$ بیش از یک y پیدا کردیم:

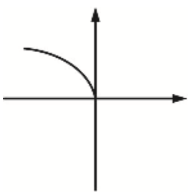
(فخیمی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ مفاهیم اولیه و تعاریف تابع)

۵- گزینه «۳» ـ به‌طور کل: در نمایش پیکانی اگر هر عضو مجموعه آغاز دقیقاً به یک عضو از مجموعه پایان مرتبط شود رابطه نشانگر یک تابع است. (فخیمی) (پایه دهم ـ فصل پنجم ـ تعاریف تابع)

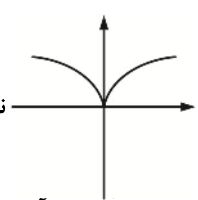
۶- گزینه «۲» ـ اگر $x>0$ آن‌گاه طبق نمودار تابع $y=\sqrt{x}$، نمودار روبرو بدست می‌آید:



اگر $x<0$ می‌توان فهمید که چون $|x|$ در نظر گرفته شده است، عبارت $y=\sqrt{|x|}$ تبدیل به $y=\sqrt{-x}$ می‌شود که می‌دانیم برای بدست آوردن تابع $f(-x)$ از روی $f(x)$ کافیست نمودار $f(x)$ را نسبت به محور $x=0$ قرینه کنیم که نمودار



بدست می‌آید. در نتیجه



نمودار صحیح بوده و گزینه «۲» صحیح است. (فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ رسم توابع شامل قدرمطلق)

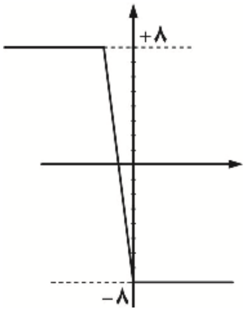
۷- گزینه «۱» ـ اگر $x \ge 0$ آن‌گاه: $2 \le x \le 7$

اگر $x \le 0$ آن‌گاه: $-7 \le x \le -2$

در نتیجه پاسخ برابر با $[-7, 7]-(-2, 2)$ است. که مشخصاً نقطه میانی بازه بزرگتر یعنی $[-7, 7]$ صفر است. گزینه «۱» صحیح است.

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ بخش ۴ ـ قدرمطلق و ویژگی‌های آن)

۸- گزینه «۳» ـ با رسم تابع $y=|x-۳|-|x+۵|$ به‌سادگی می‌توان فهمید گزینه «۳» صحیح است.



(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ رسم توابع شامل قدرمطلق)

۹- گزینه «۴» ـ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(۲x-۲)^۲<(x+۵)^۲ \;\Rightarrow\; ۴x^۲+۴-۸x<x^۲+۲۵+۱۰x$$
$$\Rightarrow\; ۳x^۲-۱۸x-۲۱<۰ \;\Rightarrow\; x^۲-۶x-۷<۰ \;\Rightarrow\; (x-۷)(x+۱)<۰$$
$$\Rightarrow\; -۱<x<۷ \;\Rightarrow\; (a,b)=(-۱,۷)\begin{cases}a=-۱\\ b=۷\end{cases}$$
$$\Rightarrow\; b-a=۷-(-۱)=۸$$

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ بخش ۴ ـ قدرمطلق و ویژگی‌های آن)

۱۰- گزینه «۲» ـ اگر $(۴,b)\in f^{-۱}$ طبق خواص وارون یک تابع می‌دانیم که $(b,۴)\in f$ خواهد بود. درنتیجه خواهیم داشت:

$$(b,۴)\in f(x)=۳x^۳+۵x-۴ \;\Rightarrow\; ۴=۳b^۳+۵b-۴$$
$$\Rightarrow\; ۳b^۳+۵b=۸$$

باتوجه به گزینه‌ها به سادگی می‌توان فهمید که $b=۱$ در معادله بالا صدق می‌کند.

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ تابع معکوس)

۱۱- گزینه «۱» ـ در ضابطه $g(x)$ به‌جای x، $f(a)$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$g(x)=۲x+۱ \xrightarrow{x=f(a)} g(f(a))=۲f(a)+۱ \xrightarrow{g(f(a))=۵} ۲f(a)+۱=۵$$
$$\Rightarrow\; ۲f(a)=۴ \;\Rightarrow\; f(a)=۲$$

از طرفی طبق زوج مرتب‌های داده شده $(۱,۲)$ عضو تابع است در نتیجه: $a=۱$

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ اعمال روی توابع)

۱۲- گزینه «۱» ـ

شرط تابع بودن: $(۲,۳)=(۲,a+۱) \;\Rightarrow\; a+۱=۳ \;\Rightarrow\; a=۲$

دراین‌صورت عضو $(a-۱,۲a)$ تبدیل به $(۱,۴)$ می‌شود. دراین‌صورت شرط ۱−۱ بودن را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}(b,۴)\in f\\ (۱,۴)\in f\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; b=۱$$

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ تابع یک‌به‌یک)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$g(f(x))=g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$
$$۲x+۳=t$$
$$\Rightarrow\; g(t)=۸\left(\frac{t-۳}{۲}\right)^۲+۲۲\left(\frac{t-۳}{۲}\right)+۲۰=۲t^۲-t+۵$$
$$fog(x)=۲(۲x^۲-x+۵)+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

(سراسری ریاضی ـ ۹۲) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ ترکیب توابع)

۱۴- گزینه «۳» ـ مقادیر $x=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\times ۲\begin{cases}f(\frac{۱}{۲})-۲f(۲)=\frac{۹}{۲}\\ f(۲)-۲f(\frac{۱}{۲})=\frac{۹}{۴}\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases}۲f(\frac{۱}{۲})-۴f(۲)=۹ \quad (I)\\ f(۲)-۲f(\frac{۱}{۲})=\frac{۹}{۴} \quad (II)\end{cases}$$

$$(I)+(II):-۳f(۲)=\frac{۴۵}{۴} \;\Rightarrow\; f(۲)=\frac{-۱۵}{۴}$$

(آزاد ریاضی ـ ۹۱) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ توابع)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$(۴\,,۱) \in gof \;\Rightarrow\; g(f(۴)) = ۱$$
$$\Rightarrow\; g(۵) = ۱ \;\Rightarrow\; b = ۵$$
$$(۴\,,۲) \in fog \;\Rightarrow\; f(g(۴)) = ۲$$
$$\Rightarrow\; g(۴) = ۳ \;\Rightarrow\; a = ۴$$

البته باتوجه به گزینه‌ها و اینکه فقط در گزینه «۳» مقدار b برابر با ۳ نوشته شده است، نیازی به یافتن a نبود!

(سراسری ریاضی ـ ۹۰) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ ترکیب توابع)

۱۶- گزینه «۱» ـ فرض کنید $g(\frac{۸}{۳}) = a$ دراین‌صورت باید a را بیابیم:

$$g(\frac{۸}{۳}) = a \;\Rightarrow\; g^{-۱}(a) = \frac{۸}{۳}$$
$$\Rightarrow\; g^{-۱}(f(x)) = \frac{۳x^۳}{۱+x^۳} = \frac{۸}{۳} \;\Rightarrow\; ۹x^۳ = ۸ + ۸x^۳ \;\Rightarrow\; x = ۲$$
$$\Rightarrow\; g^{-۱}(f(۲)) = \frac{۸}{۳} \;\Rightarrow\; a = f(۲) = ۳$$

(فخیمی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ وارون تابع)

۱۷- گزینه «۲» ـ اولاً اینکه تابع به فرم سینوسی است چرا که در نقطه صفر برابر با صفر شده است. پس گزینه «۱» و «۴» حذف می‌شوند چرا که اگر $x = ۰$ در آن‌ها جایگذاری شود مقدار $\cos(۰)$ بدست می‌آید که برابر با یک است. از طرفی تابع در نقطه π برابر با ۱ است که می‌توان به سادگی بررسی کرد که گزینه «۲» صحیح است. (فخیمی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ انبساط و انقباض نمودارها)

۱۸- گزینه «۳» ـ طبق قوانین موجود برای رسم گزینه «۳» درست است. تصحیح دیگر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نسبت به محور yها قرینه کنیم.

گزینه «۲»: به‌اندازه $\frac{۱}{۳}$ برابر منقبض کنیم.

(فخیمی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ رسم توابع و قوانین رسم)

۱۹- گزینه «۳» ـ مشخص است در نقطه $x = ۰$ مقدار تابع برابر با ۱ است در نتیجه گزینه «۲» و «۴» نادرست هستند از طرفی دامنه تابع $y = ۱ + \sqrt{-۲x}$، بازه $(-\infty\,,۰]$ است در نتیجه گزینه «۱» نیز قطعاً نادرست است و پاسخ گزینه «۳» است.

(فخیمی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ رسم توابع)

۲۰- گزینه «۲» ـ به‌طور کلی اگر یک عدد در $f(x)$ ضرب شود تأثیر آن برروی برد خواهد بود و اگر مقادیر ورودی تابع دچار تغییر شوند (عبارت داخل پرانتز تغییر کند. مثلاً $f(x)$ تبدیل به $f(x+۱)$ شود) تأثیر آن بر روی دامنه خواهد بود.

(فخیمی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ تأثیر انتقال و انبساط و انقباض بر روی دامنه و برد)