هندسه ۳

۱- گزینه «۴» ـ می‌دانیم در ماتریس‌های قطری درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین باید به ازای هر $i \neq j$ مقدار عبارت $\frac{k^{2}-4k+3}{i-2j}$ برابر صفر باشد. یعنی:

$$k^{2}-4k+3=0$$

به سادگی می‌توان دید مجموع مقادیر ممکن برای k برابر $S=4$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ماتریس‌های خاص)

۲- گزینه «۳» ـ از برابری $A^{2}-B=\hat{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^{2}=B$، پس:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}}_{A^{2}}=\underbrace{\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}}_{B}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a+b=5\\ 4a+b=5\end{cases}$$

یعنی $a=0$ و $b=5$، در نتیجه:

$$2a+3b=0+15=15$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۳- گزینه «۲» ـ از برابری $A+B=I$ به‌دست می‌آید $B=I-A$، از طرف دیگر چون I و A جابه‌جایی دارند پس اتحادها برای آن‌ها صدق می‌کنند. اکنون می‌نویسیم:

$$B^{2}=(I-A)^{2}=I^{2}-2IA+A^{2}=I-2A+A^{2}$$

بنابر فرض $A^{2}=2A$، پس:

$$B^{2}=I-2A+2A=I$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ اتحادها در ماتریس‌ها)

۴- گزینه «۳» ـ چون ضرب $A\times B$ تعریف شده و حاصل برابر C است، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}4x-1=7\\ 2=y-1\\ 3=z+2\end{cases}$$

یعنی:

$x=2$، $y=3$ و $z=1$

اکنون می‌نویسیم:

$$2x-y+z=4-3+1=2$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ شرط ضرب شدن دو ماتریس)

۵- گزینه «۳» ـ به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$A^{2}=A\times A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\hat{O}$$

اکنون عبارتِ خواسته شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(A+2I)(2A-I)^{2}=(A+2I)(\underbrace{4A^{2}}_{O}-4A+I)=(A+2I)(-4A+I)=\underbrace{-4A^{2}}_{O}+A-8A+2I=-7A+2I$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۶- گزینه «۳» ـ دقت کنید که چون در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد، پس اتحادها در آن‌ها برقرار نیست. اکنون می‌نویسیم:

$$(A+B)^{2}-(A-B)^{2}=(A+B)(A+B)-(A-B)(A-B)=A^{2}+AB+BA+B^{2}-(A^{2}-AB-BA+B^{2})$$
$$=A^{2}+AB+BA+B^{2}-A^{2}+AB+BA-B^{2}=2AB+2BA=2(AB+BA)$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها)

۷- گزینه «۳» ـ برابری $AB = ۳BA$ را از راست در B ضرب می‌کنیم:

$$AB^۲ = ۳BAB \xrightarrow{AB=۳BA} AB^۲ = ۳B(۳BA) = ۹B^۲A$$

اکنون برابری $AB^۲ = ۹B^۲A$ را از طرف راست در B ضرب می‌کنیم:

$$AB^۳ = ۹B^۲AB = ۹B^۲(۳BA) = ۲۷B^۳A$$

با مقایسه برابری‌های $AB^۳ = ۲۷B^۳A$ و $AB^۳ = kB^۳A$ به‌دست می‌آید:

$$k = ۲۷$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها)

۸- گزینه «۲» ـ به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & X \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ X \end{bmatrix} = -۴ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲+۲X & ۶+X & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ X \end{bmatrix} = -۴ \Rightarrow ۶+۶X-۶-X+X^۲ = -۴ \Rightarrow X^۲+۵X+۴ = ۰$$

یعنی: $x = -۱$ یا $x = -۴$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس‌ها)

۹- گزینه «۱» ـ با توجه به تعریف می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & & \cdots & & -۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & -۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -۱ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix} = I$$

می‌توان نوشت:

$$A^{۱۳۹۹} = (A^۲)^{۶۹۹} \times A = I^{۶۹۹} \times A = A$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توان در ماتریس)

۱۰- گزینه «۳» ـ طبق قاعده ضرب ماتریس‌ها باید ماتریس A از مرتبه ۳×۱ باشد. با فرض:

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & a & b \\ c & d & -۴ \\ e & -۲ & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳x & ۳y & ۳z \\ ۲x & ۲y & ۲z \\ -x & -y & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & a & b \\ c & d & -۴ \\ e & -۲ & f \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۳x = ۶ \ ، \ ۲z = -۴ \ ، \ -y = -۲$$

یعنی: $x = ۲$ ، $y = ۲$ و $z = -۲$.

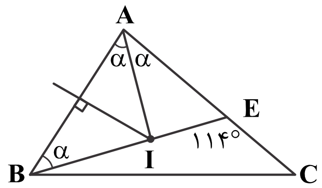
در نتیجه:

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = x+y+z = ۲+۲-۲ = ۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس)

هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون AI نیمساز زاویه A است، پس:



$$B\hat{A}I = E\hat{A}I = \alpha$$

همچنین می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصفِ یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله اســت،

بنابراین $IA = IB$ و در نتیجه مثلث IAB متساوی‌الساقین است و: $I\hat{A}B = I\hat{B}A = \alpha$

از طرف دیگر زاویه BEC، زاویه خارجی برای مثلث ABE است، پس:

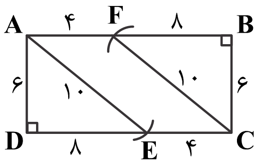
$$B\hat{E}C = E\hat{A}B + A\hat{B}E = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha \Rightarrow ۱۱۴° = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = ۳۸°$$

در نهایت به‌دست می‌آید:

$$\hat{A} = ۲\alpha = ۲ \times ۳۸° = ۷۶°$$

(کتاب همراه علوی ـ با تغییر) (پایه دهم ـ فصل اول ـ ویژگی عمودمنصف‌ها و نیمسازها ـ زاویه خارجی)

۲- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در مثلث ADE، بنابر قضیه فیثاغورس:



$$DE = \sqrt{AE^۲ - AD^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$$

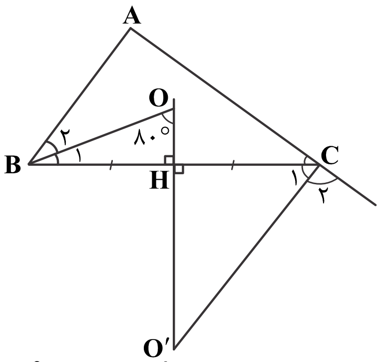
به‌دست می‌آید: $AF = AB - BF = ۱۲ - ۸ = ۴$.

اکنون می‌نویسیم:

$$\frac{\text{محیط } AFCE}{\text{محیط } ADE} = \frac{۲(۴+۱۰)}{۶+۸+۱۰} = \frac{۷}{۶}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ ترسیم با خط‌کش و پرگار)

۳- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در مثلث OBH به‌دست می‌آید:



$$\hat{B}_۱ = ۱۰°$$

BO نیمساز داخلی زاویه B است. پس $\hat{B}_۲ = \hat{B}_۱ = ۱۰°$ در نتیجه: $\hat{B} = ۲۰°$

اکنون در مثلث ABC:

$$\text{زاویه خارجی } C = \hat{A} + \hat{B} = ۱۰۰° + ۲۰° = ۱۲۰°$$

CO' نیمساز زاویه خارجی C است، پس:

$$\hat{C}_۱ = \frac{۱۲۰°}{۲} = ۶۰°$$

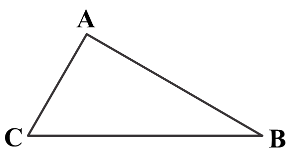
اکنون در مثلث قائم الزاویه $O'CH$ به‌دست می‌آید:

$$C\widehat{O'}H = ۹۰° - \hat{C}_۱ = ۹۰° - ۶۰° = ۳۰°$$

توجه: دقت کنید که اگر OO' هر خط دلخواه دیگری هم که عمود بر BC باشد، باز هم همین جواب به‌دست می‌آمد.

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ ویژگی نیمساز و عمودمنصف)

۴- گزینه «۴» ـ می‌دانیم در هر مثلث بین دو ضلع، زاویه مقابل به ضلع بزرگ‌تر؛ برزگ‌تر است از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر. اکنون مــی‌تــوان از نابرابری‌های $AC < AB < BC$ نتیجه گرفت: $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$



پس گزینه «۴» درست است. (هویدی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ نابرابری‌های هندسی)