هندسه

۱- گزینه «۴» ــ درایه سطر m و ستون n برابر صفر است، پس:

$$5m - 4n - mn = 0 \Rightarrow m = \frac{4n}{5-n}$$

چون $m > 0$، پس $5 - n > 0$ یا $n < 5$. از طرف دیگر چون n تعداد ستون‌های ماتریس است، پس: $n \geq 1$. اکنون به‌ازای $1 \leq n \leq 4$ مقادیر مورد قبول m را به‌دست می‌آوریم:

m	۱	$\frac{8}{3}$	۶	۱۶
n	۱	۲	۳	۴
	✓	×	✓	✓

در نتیجه بیشترین مقدار $m+n$ برابر ۲۰ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ مرتبه ماتریس ــ درایه عمومی) (دشوار)

۲- گزینه «۴» ــ ابتدا A و سپس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

(سراسری خارج از کشور ــ ۹۴) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ ضرب ماتریس‌ها) (آسان)

۳- گزینه «۲» ــ ابتدا ماتریس A^2 و از روی آن A^4 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(سراسری خارج از کشور ــ ۹۲ با تغییر) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ ضرب ماتریس) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ــ می‌دانیم برای به توان رساندن یک ماتریس قطری کافی است درایه‌های روی قطر اصلی آن را به توان برسانیم، بنابراین:

$$A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A \,,\, A^2 = I$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$(A^7 + A^2)(A^7 - A^2) = (A+I)(A-I) = A^2 - I = I - I = \bar{O}$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ به توان رساندن ماتریس ــ ماتریس قطری) (آسان)

۵- گزینه «۱» ــ به‌دست می‌آید:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = A$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I = A + 2A + I = 3A + I \Rightarrow (A+I)^4 = (3A+I)^2 = 9A^2 + 6A + I = 9A + 6A + I = 15A + I$$

در نتیجه $m = 15$ و $n = 1$، یعنی $m + n = 16$. (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ توان در ماتریس‌ها) (متوسط)

۶- گزینه «۳» ـ به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۳\\۳&۳&۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=۳A$$

اکنون از برابری $A^{۲}=۳A$ نتیجه می‌گیریم $A^n=۳^{n-۱}A$.

از برابری $A^n-۲۴۳A=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^n=۲۴۳A$.

در نتیجه:

$$۳^{n-۱}A=۲۴۳A \Rightarrow n-۱=۵ \Rightarrow n=۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ضرب ماتریس‌ها) (متوسط)

۷- گزینه «۳» ـ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، به‌طوری‌که a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، بنابر فرض مسئله:

$$A\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۰\end{bmatrix}A \Rightarrow \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a+۲b&a\\c+۲d&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\۲a&۲b\end{bmatrix}$$

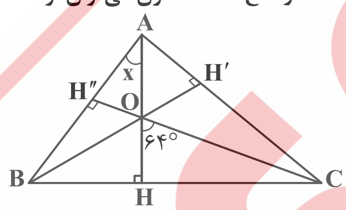
از این برابری به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a+۲b=a+c \Rightarrow c=۲b\\a=b+d\end{cases}$$

پس $A=\begin{bmatrix}b+d&b\\۲b&d\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های آن $۴b+۲d$ است و چون b و d طبیعی هستند، پس مینیمم $۴b+۲d$ برابر ۶ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ ضرب ماتریس‌ها) (دشوار)

۸- گزینه «۲» ـ CO را امتداد می‌دهیم تا AB را در H'' قطع کند. چون ارتفاع‌های مثلث همرس هستند، پس CH'' ارتفاع است، اکنون می‌توان نوشت:



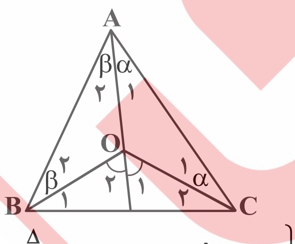
$$\widehat{AOH''}=\widehat{COH}=۶۴° \quad (\text{متقابل به رأس})$$

در نتیجه:

$$\overset{\Delta}{AOH''}: x=۹۰°-\widehat{AOH''}=۹۰°-۶۴°=۲۶°$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ زاویه‌ها در مثلث، همرسی ارتفاع) (متوسط)

۹- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. چون O محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث است، پس:



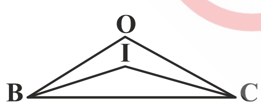
$$\overset{\Delta}{OAC}: OA=OC \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}=\alpha$$

$$\overset{\Delta}{OAB}: OA=OB \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=\beta$$

همچنین:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OAC}\ \text{خارجی برای}\ \hat{O}_۱=۲\alpha\\ \overset{\Delta}{OAB}\ \text{خارجی برای}\ \hat{O}_۲=۲\beta\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \widehat{BOC}=۲(\alpha+\beta)=۲\hat{A}=۱۶۰°$$

اکنون در مثلث OBC به‌دست می‌آید:

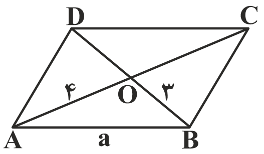


$$\widehat{BIC}=۱۸۰°-\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}=۱۸۰°-\frac{۱۸۰°-\hat{O}}{۲}$$

$$=۹۰°+\frac{\hat{O}}{۲}=۹۰°+\frac{۱۶۰°}{۲}=۱۷۰°$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس ۲ ـ همرسی عمودمنصف‌ها ـ زاویه نیمسازها) (دشوار)

۱۰- گزینه «۲» ــ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم (دقت کنید که متوازی‌الاضلاع را رسم شده فرض کرده‌ایم). اگر متوازی‌الاضلاع قابل رسم باشد، باید مثلث OAB وجود داشته باشد، پس:



$$|۴-۳| < a < ۳+۴ \Rightarrow ۱ < a < ۷$$

در نتیجه:

$a \in \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

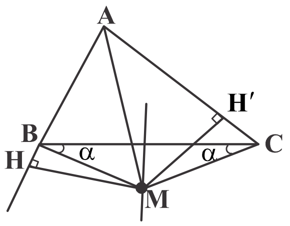
(هویدی) (پایه دهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ ترسیم ــ نابرابری مثلثی) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» ــ چون O محل همرسی نیمسازها است، پس از ضلع‌های مثلث به یک فاصله‌اند؛ یعنی ارتفاع‌های مثلث‌های OAB، OAC و OBC با هم برابرند. آن‌ها را h فرض می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$\frac{۲x+y}{z+y} = \frac{۲(\frac{۱}{۲}\times ۶\times h)+\frac{۱}{۲}\times ۸\times h}{\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times h+\frac{۱}{۲}\times ۸\times h} = \frac{۱۲+۸}{۱۲+۸} = \frac{۲۰}{۲۰} = ۱$$

(هویدی) (پایه دهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ همرس نیمسازها) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ــ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

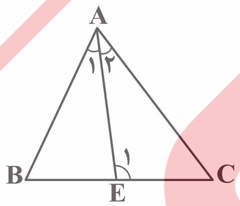


چون M روی عمودمنصف BC است، پس $MB = MC$ و مثلث MBC متساوی‌الساقین است. در نتیجه در مثلث MBC، $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. از طرف دیگر M روی نیمساز زاویه A است، در نتیجه $MH = MH'$. اکنون نتیجه می‌گیریم: $\overset{\Delta}{MBH} \cong \overset{\Delta}{MCH'}$، بنابراین: $\widehat{MBH} = \widehat{MCH'}$، در نتیجه:

$$۱۸۰^\circ - (\hat{B}+\alpha) = \alpha + \hat{C} \Rightarrow ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}+\hat{C}) \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ}{۲} = ۲۵^\circ$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ ویژگی‌های نیمساز و عمودمنصف) (دشوار)

۱۳- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون E از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، پس E روی نیمساز زاویه A قرار دارد؛ یعنی $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$.



زاویه $E_۱$، خارجی برای مثلث ABE است، بنابراین:

$$\hat{E}_۱ > \hat{A}_۱ \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{E}_۱ > \hat{A}_۲$$

در نتیجه در مثلث ACE، زاویه $E_۱$ بزرگتر از زاویه $A_۲$ است، پس $AC > CE$.

(هویدی) (پایه دهم ــ فصل اول ــ درس ۲ ــ نامساوی‌ها) (متوسط)