

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 5k & 0 \\ 0 & 0 & 10k \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 17k = 34 \Rightarrow k = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = \frac{3}{2}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^F = A^T A^T = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^F = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 81 & 80 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 81 \\ 2\alpha = 80 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 40 \\ \beta = -39 \end{cases}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = I$$

$$\begin{cases} A^T = I \Rightarrow (A^T)^{50} = I^{50} \Rightarrow A^{100} = I \\ A^T = I \Rightarrow (A^T)^{49} = I^{49} \Rightarrow A^{98} = I \xrightarrow{\times A} A^{99} = A \end{cases}$$

$$A^{100} - A^{99} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

$$A^T - A + I = \bar{O}$$

$$A^T = A - I \xrightarrow{\times A} A^T = A^T - A = (A - I) - A = -I$$

$$\Rightarrow A^T = -I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^6 = I$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

۵- گزینه «۲» - ماتریس ستونی 3×1 است و چون ماتریس حاصل 3×3 است، ماتریس A باید 1×3 باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \\ -2x & -2y & -2z \\ 4x & 4y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 5, y = 1, z = 3$$

$$c + d = -2z + 4x = -2(3) + 4(5) = 14$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & - & - \\ - & 8 & - \\ - & - & 18 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع عناصر قطر اصلی} = 2 + 8 + 18 = 28$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (اسان)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -7+x & x & 4x-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -21 + 2x + x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = -20$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

۸- گزینه «۴» - ماتریس‌هایی که درایه‌های زیر قطر اصلی یا بالای قطر اصلی آن‌ها صفر هستند (ماتریس‌های بالا مثلثی یا پایین مثلثی) وقتی به توان می‌رسند همان حالت مثلثی را حفظ می‌کنند و درایه‌های قطر اصلی آن‌ها نیز به توان می‌رسد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 8 & - & - \\ 0 & -27 & - \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

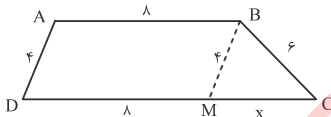
$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^5 = \begin{bmatrix} -1 & - & - \\ 0 & 32 & - \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$A^T B^5 = \begin{bmatrix} 8 & - & - \\ 0 & -27 & - \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & - & - \\ 0 & 32 & - \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ 0 & 0 & -32 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر سوم} = -32$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

۹- گزینه «۳» - از رأس B به موازات ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده بزرگ را در M قطع کند. در مثلث BMC باید نامساوی مثلث برقرار باشد:



$$6 - 4 < x < 6 + 4 \Rightarrow 2 < x < 10$$

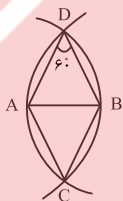
$$\xrightarrow{+8} 10 < DC < 18$$

(یاقوتی) (پایه دهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - برای رسم نیمساز به ۳ کمان نیاز داریم. همچنین برای رسم خط عمود بر خط d از نقطه A روی خط d یا خارج از آن خط باشد) به ۳ کمان نیاز داریم.

برای رسم یک لوزی به طول ضلع ۸ و زاویه 60° به ۲ کمان نیاز داریم:

پاره خط AB به طول ۸ رسم می‌کنیم. به مرکز A و شعاع ۸ و همچنین به مرکز B و شعاع ۸ کمان‌هایی رسم می‌کنیم. این دو کمان در نقاط C و D یکدیگر را قطع می‌کنند. ۴ ضلعی $ABCD$ جواب مساله است:



(یاقوتی) (پایه دهم - فصل یکم - درس یکم) (متوسط)