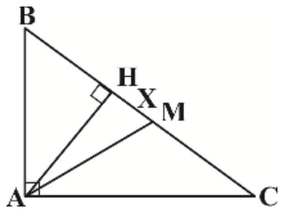
هندسه

۱- گزینه «۳» ـ در مثلث ABC و $\hat{A} < \hat{B}$ طبق قضیه ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر از دیگری است. $BC < AC$ $\xleftarrow{\text{چون اعداد طبیعی اند}}$ حداقل اختلاف در مثلث DEF، $\hat{D} < \hat{E} \Leftarrow EF < DF$ حداقل اختلاف EF , DF یا از طرفی می‌دانیم $AC = EF$ بنابراین حداقل اختلاف AC , DF برابر است با ۲ (دیزجی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ صفحه ۲۲)

۲- گزینه «۴» ـ در این سؤال طول HM را x فرض می‌کنیم حال می‌دانیم میانه وارد بر وتر BC را به ۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



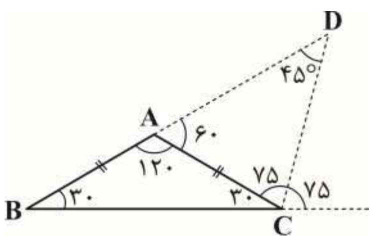
$$\Rightarrow\ MB = MC \ \Rightarrow\ HB + HM = HC - MH \ \Rightarrow\ ۲x = ۱۰ \ \Rightarrow\ x = ۵$$

$$\Rightarrow\ AM = MC = ۱۸ - ۵ = ۱۳\ ,\ AH^۲ = AM^۲ - x^۲ \ \Rightarrow\ AH = ۱۲$$

$$\Rightarrow\ S_{ABC} = \frac{AH + BC}{D} = \frac{۱۲ \times ۲۶}{۲} = ۱۵۶$$

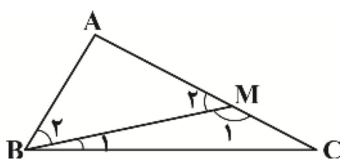
(دیزجی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ ترسیم‌های هندسی)

۳- گزینه «۳» ـ



(دیزجی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ صفحه ۱۱)

۴- گزینه «۳» ـ راه حل:



$$\text{می‌دانیم} \ \Rightarrow\ \begin{cases} (B_۱ + B_۲) - C = ۲۰ \\ M_۲ = B_۲ \qquad B_۱ : ? \end{cases}$$

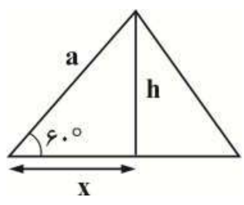
$$\Rightarrow\ M_۲ = B_۱ + C = B_۲ \ \Rightarrow\ (B_۱ + B_۱ + C) - C = ۲۰$$

$$\Rightarrow\ B_۱ = ۱۰^\circ$$

(دیزجی) (پایه دهم ـ استدلال)

۵- گزینه «۲» ـ (دیزجی) (پایه دهم ـ ترسیم‌های هندسی ـ صفحه ۱۸)

۶- گزینه «۳» ـ مجموع فواصل هر نقطه درون متساوی‌الاضلاع، برابر ارتفاع آن می‌باشد.



$$\Rightarrow\ h = ۶\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{h}{a} \ \Rightarrow\ a = ۱۲$$

$$\Rightarrow\ x^۲ = ۱۴۴ - ۱۰۸ \ \Rightarrow\ x = ۶ \ \Rightarrow\ \text{مساحت مثلث}\ \frac{۲xh}{۲} = ۳۶\sqrt{۳}$$

(دیزجی) (پایه دهم ـ فصل اول)

۷- گزینه «۳» ـ می‌دانیم ضرب ۲ ماتریس زمانی امکان‌پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

الف) $D_{۹\times۵}\quad B_{۵\times۱۱}\quad C_{۱۱\times۷}\quad A_{۲\times۷}$
✓ ✓ ✗

ب) $A_{۲\times۷}\quad C^t_{۷\times۱۱}\quad B_{۵\times۱۱}$
✓ ✗

ج) $D_{۹\times۵}\quad B_{۵\times۱۱}\quad C_{۱۱\times۷}$
✓ ✓

د) $B^t_{۱۱\times۵}\quad D^t_{۵\times۹}\quad A_{۲\times۷}$
✓ ✗

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ ضرب ۲ ماتریس ـ صفحه ۱۷)

۸- گزینه «۱» ـ

$$\begin{array}{c} h_۱ \\ h_۲ \\ h_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۵ & ۲۸ & ۹ \\ ۳ & ۱۲ & ۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۸ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{array}{l} h_۱ \\ h_۲ - ۵h_۱ \\ h_۳ - ۳h_۱ \end{array} = ۱۶|A|^۲ \Rightarrow |A| = ۴$$

در اعمال بر روی دترمینان ماتریس‌ها، می‌توانیم یک سطر (یا ستون) را با ضرب در عددی حقیقی و جمع آن با سطر (یا ستون) دیگر، دترمینان خود را ساده‌تر نماییم به عبارت دیگر:

$$\begin{array}{c} h_۱ \\ h_۲ \\ h_۳ \end{array}\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c-\alpha a & f-\alpha b & g-\alpha c \\ h-\beta\alpha & i-\beta b & j-\beta c \end{vmatrix}\begin{array}{l} h_۱ \\ h_۲ - \alpha h_۱ \\ h_۳ - \beta h_۱ \end{array}$$

الف) $$\begin{array}{c} h_۱ \\ h_۲ \\ h_۳ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۱۲ & ۳ \\ ۳ & ۱۵ & ۲۰ \end{bmatrix} = \begin{array}{c} h_۱ \\ h_۲ - ۲h_۱ \\ h_۳ - ۳h_۱ \end{array}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۲ & -۹ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۴$$

ب) $$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۸ & ۱۷ & ۴ \\ ۵ & ۱۰ & -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۲۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix} = ۶$$

ج) $۴۲ - ۳۰ = ۱۲$

د) $۱(۱۶ - ۳۵) - ۰ + (-۲)(۱)(۲۰ - ۲۴) = -۱۹ + ۸ = -۱۱$

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ صفحه ۲۷)

۹- گزینه «۴» ـ در ماتریس A که متقارن است به‌ازای هر $۱ \le i, j \le ۳$ ، $[A_{ij}] = [A_{ji}]$

$$A = \begin{bmatrix} a-۷ & ۹-b & ۱۲-a-b \\ ۶ & c-۲ & ۱۱-c-a \\ ۸ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow ۶ = ۹ - b \Rightarrow b = ۳, ۱۲ - a - b = ۸ \Rightarrow a = ۱$$

$۱۱ - c - a = ۴ \Rightarrow c = ۶$

حال می‌دانیم اگر $A^{-۱}$ وارون A باشد بنابراین $AA^{-۱} = I$ می‌باشد. بنابراین گزینه‌ها را چک می‌کنیم.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -۶ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۴ & ۴ \\ ۸ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) $AA^{-۱} = \begin{bmatrix} -۶ & ۶ & ۸ \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +۱ & - & - \\ ۴ & - & - \\ -۲ & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$ ×

ب) $AA^{-۱} = \begin{bmatrix} -۶ & ۶ & ۸ \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & - & - \\ ۳ & - & - \\ ۲ & - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۸ & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$ ×

ج) $AA^{-۱} =$ گزینه «ب» $= [AA^{-۱}_{۱۱}]$ درایه ماتریس ×

د) ✓

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون ماتریس‌ها ـ صفحه ۲۲)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$A^۳ = ۶A^۲ + ۸A \xrightarrow{\times A^{-۱}} A^۲AA^{-۱} = ۶AAA^{-۱} + ۸AA^{-۱} \Rightarrow A^۲ = ۶A + ۸I$$

$$\xrightarrow{\times A^{-۱}} AAA^{-۱} = ۶AA^{-۱} + ۸A^{-۱} \Rightarrow A - ۸A^{-۱} = ۶I \Rightarrow |A - ۸A^{-۱}| = ۶$$

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون و دترمینان ماتریس‌ها)

۱۱- گزینه «۳» ـ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{۱}{ad - bc}\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون ماتریس‌ها ـ صفحه ۲۳)

۱۲- گزینه «۴» ـ

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

همانی ✓

(دیزجی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ اعمال روی ماتریس‌ها و ضرب ۲ ماتریس)