ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۴» ـ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: فرض می‌کنیم $x = ۹$ و $y = ۱۰$، در این‌صورت $x + y = ۱۹$، عددی اول است.

گزینه «۲»: به سادگی هر دو عدد اول که فرد باشند را می‌توان به‌عنوان مثال نقض در نظر گرفت:

$$\begin{cases} x = ۳ \\ y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x + y = ۸}_{\text{عددی مرکب است}}$$

توجه: دقت کنید که هر دو عدد اول فرد همه مثال‌های نقض نیستند. به‌عنوان مثال ۲ و ۱۹ هم می‌توانند مثال نقض باشند.

گزینه «۳»: اگر $x = ۱$ و $y = ۲$ در این‌صورت $xy = ۲$ که عددی اول است.

گزینه «۴»: این گزاره درست است و هیچ مثال نقضی برای آن به‌دست نمی‌آید. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ریاضی ـ مثال نقض)

۲- گزینه «۳» ـ در مثال صفحه ۲ کتاب درسی بند «ب» دیدیم گزاره گزینه «۳» به ازای $n = ۵$ رد می‌شود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: فرض کنید عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $k = n(n+۱)$، بنابراین:

$$۴k + ۱ = ۴n(n+۱) + ۱ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ = (۲n+۱)^۲ \quad \text{مربع کامل است:}$$

گزینه «۲»: فرض کنید:

$$x = \frac{a}{b} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad , \quad b \neq ۰$$

$$y = \frac{c}{d} \quad ; \quad c, d \in \mathbb{Z} \quad , \quad d \neq ۰$$

در نتیجه:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$ad + bc$ عددی صحیح و bd عددی صحیح و مخالف صفر است، پس $x + y$ عددی گویا است.

گزینه «۴»: اثبات این گزینه در صفحه ۷ کتاب درسی آمده است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ مثال نقض)

۳- گزینه «۳» ـ به روش «اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها» تمام اعضای S را در عبارت $۳^n + ۲$ قرار می‌دهیم و آن هایی که عدد اول تولید می‌کنند را مشخص می‌کنیم:

n	$۳^n + ۲$
۱	۵ ✓
۲	۱۱ ✓
۳	۲۹ ✓
۴	۸۳ ✓
۵	۲۴۵ ×

پس گزاره بیان شده درست است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: بنابر مثال صفحه ۷ کتاب درسی این نابرابری به ازای $a > ۰$ برقرار است.

گزینه «۲»: این نابرابری زمانی برقرار است که x و y هم‌علامت باشند. به سادگی می‌توان $x = ۱$ و $y = -۱$ را مثال نقض برای گزاره بیان شده در نظر گرفت.

گزینه «۴»: می‌توان $\alpha = ۲\sqrt{۲}$ و $\beta = -\sqrt{۲}$ را به‌عنوان مثال نقض این گزینه در نظر گرفت.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ مثال نقض ـ برهان خلف ـ اثبات بازگشتی ـ اشباع)

۴- گزینه «۱» ـ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۲»: $۱^۲ + ۲^۲ + ۲^۲ = ۹$

گزینه «۳»: $۲^۲ + ۲^۲ + ۲^۲ = ۱۲$

گزینه «۴»: $۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۱$

اما عدد ۱۰ که در گزینه «۱» آمده است را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات سه عدد مربع کامل نوشت.

(کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ مثال نقض)

۵- گزینه «۳» ـ تمامی گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به وسیله برهان خلف اثبات می‌شوند ولی گزینه «۳» به‌صورت زیر با روش مستقیم اثبات می‌شود:

عدد فرد $n = 2k + 1$ را در نظر می‌گیریم:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

ضرب دو عدد متوالی k و $k+1$ همواره زوج است، پس فرض می‌کنیم $k(k+1) = 2q$ اکنون به‌دست می‌آید:

$$n^2 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

در نتیجه حکم ثابت شد. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ برهان خلف اثبات مستقیم)

۶- گزینه «۳» ـ برای اثبات از روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها استفاده می‌کنیم. برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $a = 0$ در این حالت حکم برقرار است، چون در حکم از ترکیب فصلی (یا) استفاده شده است.

ب) اگر $a \neq 0$، در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = 0$ در a^{-1} به‌دست می‌آید:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است. (کتاب همراه علوی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۷- گزینه «۲» ـ در اثبات این گزاره از اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها استفاده می‌کنیم. دو حالت در این‌جا ممکن است رخ دهد:

«الف»: n زوج است، به عبارت دیگر $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ در این حالت می‌نویسیم:

$$n^2 - 5n + 9 = (2k)^2 - 5(2k) + 9 = 4k^2 - 10k + 8 + 1$$

که حاصل عددی فرد است.

«ب»: n فرد است، یعنی $n = 2k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ در این حالت می‌نویسیم:

$$n^2 - 5n + 9 = (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 9 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 9 = 4k^2 - 14k + 14 + 1 = 2(2k^2 - 7k + 7) + 1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^2 - 5n + 9$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $(p \vee q) \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوه اثبات در تست توجیه می‌شود.

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها)

۸- گزینه «۱» ـ عبارت داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{دو طرف را در ۲}} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0$$

این برابری زمانی برقرار است که $a = b = 0$. اما چون a و b در تساوی داده شده در مخرج قرار دارند، هیچ‌کدام نمی‌توانند صفر باشند. پس هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) به‌دست نمی‌آید که در برابری داده شده صدق کند. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ اثبات بازگشتی)

۹- گزینه «۲» ـ عبارت $4n^2 - 12n + 1$ را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$A = 4n^2 - 12n + 1 = 4n^2 - 12n + 9 - 8 = (2n-3)^2 - 8$$

اکنون به‌سادگی با قرار دادن $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ به جای n به‌دست می‌آید:

$$A = (2(\frac{\sqrt{5}+3}{2}) - 3)^2 - 8 = (\sqrt{5} + 3 - 3)^2 - 8 = -3$$

پس این عدد کلیت گزاره داده شده را رد می‌کند.

توجه: دقت کنید که صفر عددی گنگ نیست، پس نمی‌تواند مثال نقض برای این ادعا باشد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ مثال نقض)

۱۰- گزینه «۳» ـ P و Q دو گزاره هم‌ارز هستند هرگاه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست باشد، یعنی یا هر دو درست، یا هر دو نادرست و به عبارت دیگر از درستی P درستی Q و همچنین از درستی Q درستی P به‌دست می‌آید.

در گزینه‌های «۱» و «۴»: از درستی هر کدام از گزاره‌ها، درستی گزاره دیگر به‌دست می‌آید.

در گزینه «۲»: چون هر دو گزاره نادرست است پس هم‌ارز هستند.

در گزینه «۳»: اگر a مضرب ۴ باشد می‌توان نتیجه گرفت a^2 مضرب است. اما از مضرب ۴ بودن a^2، نمی‌توان نتیجه گرفت a هم مضرب ۴ است. به‌عنوان مثال نقض اگر $a^2 = 4$ آن‌گاه a نمی‌تواند مضرب ۴ باشد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ گزاره‌های هم‌ارز)

۱۱- گزینه «۳» ـ توجه عددی می‌تواند کلیت این حکم را نقض کند که بر ۳ بخش‌پذیر باشد و رقم یکان آن مضرب ۳ نباشد. در بین گزینه‌ها تنها گزینه «۳» این ویژگی را دارد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ گزاره شرطی و مثال نقض)

۱۲- گزینه «۲» ـ با توجه به این که گزاره P همواره درست است، گزاره‌ای می‌تواند جایگزین Q شود تا $P \Leftrightarrow Q$ درست شود که همواره درست باشد. در بین گزینه‌ها تنها گزینه «۲» همواره درست است.

اثبات. می‌نویسیم:

$$n^۲ + n - ۶ = \underbrace{n(n+۱)}_{\text{زوج است}} - ۶ = ۲k - ۶ = ۲(k-۳)$$: همواره زوج است

برای گزینه‌های دیگر می‌توان مثال نقض پیدا کرد:

گزینه «۱»: $n = ۱ \rightarrow ۱۳n - ۱ = ۱۳ - ۱ = ۱۲$ ×

گزینه «۳»: $n = ۲ \rightarrow ۱۷n = ۳۴$ ×

گزینه «۴»: $n = ۱ \rightarrow n + ۴ = ۵$ ×

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ گزاره‌های هم‌ارز)

۱۳- گزینه «۴» ـ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\frac{۶}{a}$ عددی گویا باشد، آن‌گاه $a = \frac{۶}{\frac{۶}{a}}$ هم عددی گویا است، اما می‌دانیم x عددی گنگ است. از این تناقض نتیجه می‌گیریم $\frac{۶}{a}$ عددی گنگ است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»:

$a = ۳\sqrt{۲} \;،\; b = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲a - ۳b = ۶\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} = ۰$ ×

گزینه «۲»:

$a = ۲^{\sqrt{۲}} \;،\; b = \sqrt{۲} \Rightarrow a^b = (۲^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲^۲ = ۴$ ×

گزینه «۳»:

$a = \sqrt{۲} + ۱ \;،\; b = \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{a-۱}{b} = \frac{\sqrt{۲}+۱-۱}{\sqrt{۲}} = ۱$ ×

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ برهان خلف)

۱۴- گزینه «۲» ـ ثابت می‌کنیم اگر تعداد جمله‌ها (n) فرد باشد، A عددی زوج است. اگر $A = (a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)\cdots(a_n - b_n)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر n عامل $a_۱ - b_۱$، $a_۲ - b_۲$، $\cdots$ و $a_n - b_n$ هم باید فرد باشند، در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی:

$(a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + \cdots + (a_n - b_n)$

باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است.

توجه: برای n های فرد می‌توان با یک مثالِ نقض نشان داد که ممکن است A فرد باشد. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ برهان خلف)

۱۵- گزینه «۴» ـ چون α عددی گویا و β عددی گنگ و $\alpha\beta$ گویا هستند نتیجه می‌گیریم $\alpha = ۰$. اکنون می‌نویسیم:

$\alpha^۲ - ۲\alpha^۳\beta^۲ + ۳\alpha + ۱ = ۰ + ۰ + ۰ + ۱ = ۱$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ استدلال ـ اعداد گویا و گنگ ـ برهان خلف)