

ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» - گزاره‌های (الف) و (ب) به کمک استدلال استنتاجی اثبات می‌شوند و تنها گزاره (ج) به روش در نظر گرفتن همه حالات اثبات می‌شود.

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - اثبات با در نظر گرفتن همه حالات) (آسان)

۲- گزینه «۳» - اگر $x^2(x+1)^2$ زوج باشد، حتماً جذر این عدد هم زوج است.

$$\frac{x(x+1)}{4} = 2k \Rightarrow x(x+1) = 4k$$

چون x و $(x+1)$ دو عدد متوالی هستند (یکی زوج و یکی فرد) پس باید x یا $(x+1)$ مضرب ۸ باشند.

۶ عضو $x = 8k \Rightarrow x \in \{8, 16, 24, \dots, 48\}$

۶ عضو $x+1 = 8k \Rightarrow x = 8k-1 \Rightarrow x \in \{7, 15, 23, \dots, 47\}$

بنابراین به ازای ۱۲ مقدار از مجموعه S حاصل A یک عدد زوج است.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - اثبات با در نظر گرفتن همه حالات) (دشوار)

۳- گزینه «۴» -

$$6\alpha - 9\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2}{3}(6\alpha - 9\beta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4\alpha - 6\beta \in \mathbb{Q}$$

نکته: اگر α و β دو عدد گنگ و $m\alpha + n\beta$ گویا باشد، چنانچه $k \in \mathbb{Q}$ باشد، $km\alpha + kn\beta$ گویا و هر ترکیب خطی دیگر از α و β گنگ است.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - برهان خلف) (متوسط)

۴- گزینه «۴» - اگر $(a+b)$ زوج باشد a و b هر دو یا هم فرد یا هر دو با هم زوج هستند

پس ab گاهی فرد و گاهی زوج است. اگر a و b هر دو فرد باشند، زوج $2a$ و b فرد است پس $2a-b$ فرد می‌شود و اگر a و b هر دو فرد باشند، $4a+b$ فرد می‌شود.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - دو گزاره هم‌ارز) (متوسط)

۵- گزینه «۴» -

$$n = 5 \Rightarrow 4^n + 1 = 4^5 + 1 = 1025$$

عد 1025 مضرب ۵ است و اول نیست.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - مثال نقض) (آسان)

۶- گزینه «۳» - مثال نقض:

$$A = \{2, 3\}, C = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cup B = A \cup C$$

اما $B \neq C$

(کتاب درسی با تغییر) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - مثال نقض) (آسان)

۷- گزینه «۲» -

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

در این صورت (ab) و $(a^2b + 3ab^2)$ حتماً صفر است اما $(3a - 7b)$ با انتخاب $a=1$ و $b=0$ برابر ۳ می‌شود.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - استدلال استنتاجی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - عدد ۲۹۳ فرد است و به هر توانی برسد فرد می‌ماند بنابراین xy نیز فرد می‌شود که هم x و هم y فرد هستند و به هر توانی هم برسند، فرد می‌مانند و می‌دانیم

مجموع دو عدد فرد حتماً زوج است، بنابراین $x^{53} + y^{82}$ زوج است.

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - استدلال استنتاجی) (متوسط)

۹- گزینه «۱» -

$$x^2 + 2y^2 + 8 \geq 2xy - 4x \xrightarrow{+2x} 2x^2 + 4y^2 + 16 \geq 4xy - 8x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 + 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2y)^2 + (x+4)^2 \geq 0$$

$$\text{پس } A = (x+4)^2$$

$$x = 5 \Rightarrow A = 9^2 = 81$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - اثبات بازگشتی) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» - نکته: می‌دانیم اگر a و b دو عدد گویا هم‌علامت باشند، داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{vab}{a^2 + b^2} = A \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{vab} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{a^2}{vab} + \frac{b^2}{vab} = \frac{1}{A}$$

$$\xrightarrow{\times v} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{v}{A} \Rightarrow \frac{v}{A} \geq 2 \Rightarrow \frac{A}{v} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq \frac{v}{2}$$

(فرهمندپور) (پایه دوازدهم - فصل ۱ - درس ۱ - اثبات بازگشتی) (دشوار)